

Mathematische Methoden der Physik WS 19/20 – Übungszettel 3:

Universität Bielefeld
Jun.-Prof. Dr. S. Schlichting

Bearbeitung der Präsenzübungen am 29.10
Abgabe der Hausübungen am 05.11

1 Präsenzübungen:

1.1 Komplexe Kontourintegrale

Wir betrachten im folgenden die Funktionen $f(z) = \bar{z} - z$ und $g(z) = \bar{z} + z$

- i) Berechnen Sie die komplexen Kurvenintegrale $\oint_{\partial K_1(0)} f(z)$ und $\oint_{\partial K_1(0)} g(z)$ entlang des Einheitskreises $\partial K_1(0)$
- ii) Berechnen Sie die komplexen Kurvenintegrale $\oint_{\triangleright} f(z)$ und $\oint_{\triangleright} g(z)$ entlang des Dreiecks \triangleright , das durch die Punkte $z_0 = 1, z_1 = -1 + i, z_2 = -1 - i$ aufgespannt wird und in mathematisch positiver Richtung durchlaufen wird.

1.2 Holomorphie, Stammfunktionen und Cauchy's Integralsatz

Betrachten Sie die die Funktion $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ mit $z \mapsto f(z) = (z + 1)^{1/2}$ wobei der Hauptzweig der komplexen Wurzelfunktion zu betrachten ist

- i) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion und geben Sie an auf welchem Gebiet die Funktion holomorph ist
- ii) Bestimmen Sie eine Stammfunktion F der Funktion f und geben Sie deren Definitionsbereich an.
- iii) Bestimmen Sie das komplexe Kontourintegral

$$\oint_{\partial K_R(0)} f(z) dz \quad R < 1$$

wobei $\partial K_R(0)$ den Kreis mit Radius R um den Ursprung bezeichnet.

[*Hinweis:* Eine explizite Berechnung ist hierzu nicht notwendig.]

2 Hausübungen:

2.1 Holomorphie und Stammfunktionen

Betrachten Sie die den Hauptzweig der komplexen Wurzelfunktion $w : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ mit $z \mapsto w(z) = z^{1/n}$ und $n \in \mathbb{N}$

- i) Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Funktion w und geben Sie deren Definitionsbereich an.
- ii) Bestimmen Sie das folgende komplexe Kontourintegral

$$\oint_{\partial K_R(0)} w(z) dz \quad R > 0$$

durch explizite Berechnung

- iii) Bestimmen Sie das Integral aus ii) mit Hilfe der Stammfunktion.

Hinweis: Beachten Sie den Definitionsbereich der Stammfunktion und wählen Sie die Kontour entsprechend.

2.2 Residuen

Betrachten Sie die Funktion $f(z) = \sum_{n=-N}^N a_n z^n$ mit $N \in \mathbb{N}$ und komplexen Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$

- i) Bestimmen Sie das komplexe Kontourintegral

$$\oint_{\partial K_R(0)} dz f(z)$$