Mathematische Methoden der Physik WS 19/20 – Übungszettel 2:

Universität Bielefeld
Jun.-Prof. Dr. S. Schlichting

Bearbeitung der Präsenzübungen am 22.10
Abgabe der Hausübungen am 29.10

1 Präsenzübungen:

1.1 Cauchy-Riemann Bedingungen und Differenzierbarkeit in $\mathbb{C}$

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ mit $f(z) = z/\bar{z}$ und $f(z) = (x^2 + y) + i(y^2 - x)$

i) Bestimmen Sie alle Punkte $z \in \mathbb{C}$ in denen die Funktionen komplex differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung $f'(z)$ in diesen Punkten. Gibt es Teilmengen $G \subset \mathbb{C}$ auf denen die Funktionen holomorph sind?

1.2 Differenzierbarkeit von $\log(z)$

Der komplexe Logarithmus $\log(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\log(z) = \log(|z|) + i\text{Arg}(z) + 2\pi k$ und $k \in \mathbb{Z}$ ist definiert als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp(z)$, für die für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ die Beziehung $\frac{d}{dz}\exp(z) = \exp(z)$ gilt.

i) Bestimmen Sie für $z \in \mathbb{C} \backslash \{\mathbb{R}_-\}$ die Ableitung von $\log(z)$.

i) Begründen Sie kurz warum $\log(z)$ für $z \in \mathbb{R}_-$ nicht differenzierbar ist. Gibt es dennoch Teilmengen $G \subset \mathbb{C}$ auf denen die Funktionen holomorph ist?

1.3 Minima und Maxima holomorpher Funktionen

Sei $f : \overline{K_1(0)} \mapsto \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $\overline{K_1(0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, die wie üblich durch Ihre Real- und Imaginärteile $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ausgedrückt wird.

i) Welche generelle Aussage können Sie über Position der globalen Minima und Maxima des Real- und Imaginärteils der Funktion treffen?

2 Hausübungen:

2.1 Cauchy-Riemann Bedingungen als Einschränkungen an Real- und Imaginärteile

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $z \mapsto f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ eine holomorphe Funktion, deren Imagninärteil als bekannt $v(x,y) = e^{-y}\sin(x)$

i) Bestimmen Sie die Funktion $f(z)$

2.2 Holomorphe Funktionen

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $z \mapsto f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ eine holomorphe Funktion

i) Beweisen Sie das $f^*(z^*)$ ebenfalls holomorph ist

ii) Beweisen Sie dass Divergenz und Rotation der reellen Vektorfelder $\vec{F}_R = u(x,y)\vec{e}_x - v(x,y)\vec{e}_y$ und $\vec{F}_I = v(x,y)\vec{e}_x + u(x,y)\vec{e}_y$ verschwinden.

2.3 Minima und Maxima holomorpher Funktionen

Sei $f : \overline{K_1(0)} \mapsto \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $\overline{K_1(0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, die wie üblich durch Ihre Real- und Imaginärteile $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ausgedrückt wird.

i) Bestimmen Sie für $f(z) = z^2 + z$ die globalen Minima und Maxima des Real- und Imaginärteils der Funktion.