Mathematische Methoden der Physik WS 19/20 – Übungszettel 1:

Universität Bielefeld
Jun.-Prof. Dr. S. Schlichting

Bearbeitung der Präsenzübungen am 15.10
Abgabe der Hausübungen am 22.10

1 Präsenzübungen:

1.1 Elementare Operation mit komplexen Zahlen

Beweisen Sie folgende Identitäten für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

i) $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$

ii) $arg(z_1/z_2) = arg(z_1) - arg(z_2)$

iii) $\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)$

1.2 Darstellung komplexer Abbildungen

i) Bestimmen Sie für $f(z) = z^3$ und $g(z) = i\bar{z}$ die Abbildung der Punkte $z = (1 \pm i)/\sqrt{2}$ und visualisieren Sie deren Abbildung in der komplexen Ebene.

ii) Bestimmen Sie den Bildbereich der Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ für die Abbildung des ersten Quadranten $Q_I = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0 \ \&\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ und der Einheitskreisscheibe $K_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

iii) Bestimmen Sie die Haupt- und Nebenzweige der Umkehrfunktion $f^{-1}(z) = z^{1/3}$ und erläutern sie am diesem Beispiel die Konzepte von Eindeutigkeit, Mehrwertigkeit und Branch Cuts.

2 Hausübungen:

2.1 Lineare Abbildungen

Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto f(z) \qquad f(z) = (\alpha + i\beta)z \tag{1}$$

mit reellen Koeffizienten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

i) Bestimmen Sie für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ den Real- und Imaginärteil von $f(z)$ als Funktion von $x = \mathrm{Re}(z)$ und $y = \mathrm{Im}(z)$.

Betrachten Sie nun die lineare Abbildung

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto g(x,y) \qquad g(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{2}$$

mit rellen Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

ii) Bestimmen Sie die Bedingungen an die Koeffizienten a, b, c, d der Matrix in Def. (2) unter denen sich $w = u + iv$ mit $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = g(x,y)$ als komplexe Multiplikation von $z = x + iy$ wie in Def. (1) darstellen lässt.

iii) Bestimmen Sie für diesen Fall die Koeffizienten α, β als Funktion von a, b, c, d.

2.2 Wurzeln komplexer Zahlen

i) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichungen $z^4 = -1$ und $z^3 = i$.

ii) Bestimmen Sie die n-ten Einheitswurzeln z_k d.h. alle $k = 0, \cdots, n-1$ Lösungen $z_k \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^n = 1$ für $n \in \mathbb{N}$.

iii) Beweisen Sie, dass für $n > 1$ die Summe der n-ten Einheitswurzeln verschwindet, d.h.

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0 \ .$$

Hinweis: Verwenden Sie die geometrische Summenformel $\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$.