# Wiederholung: Komplexe Kurvenintegrale

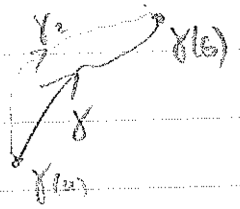
Stammfunktion $F: U \subseteq \mathbb{C}$

$$\forall z \in U \quad F'(z) = f(z)$$

**Bsp:** $f(z) = z^n \quad n \geq 0$

hat Stammfunktion $F(z) = \frac{1}{n+1} z^{n+1}$

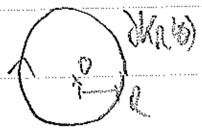
Durch Stammfunktion lassen sich Kurvenintegrale berechnen $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \quad \gamma(t) \in U \ \forall t \in [a,b]$




$$\int_\gamma dz\, f(z) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

insbesondere hängt der Wert des Integrals ausschließlich von Anfangs- und Endpunkten ab und $\oint dz\, f(z) = 0$

Dabei ist allerdings darauf zu achten dass die Kurve vollständig in $U$ verläuft



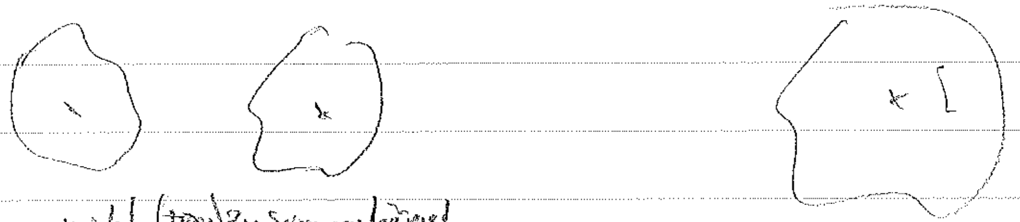

**Bsp:** $\oint_{\partial K_R(z)} dz\, f(z)$ für $f(z) = z^n$ für $n \in \mathbb{Z}$

$$= \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

Da für $n = -1$ die Stammfunktion $F(z) = \log(z)$ einen branch cut aufweist ist das Integral nicht verschwindend

Da wir bereits gesehen haben dass Definitionsbereiche eine wichtige Rolle spielen (siehe z.B. $\mathbb{Z}^n$) brauchen wir hierzu zunächst einige weitere Begrifflichkeiten

Wir hatten bereits offene und abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{C}$ betrachtet, um das zu erweitern müssen wir nur das Verhalten von Kurven klassifizieren



nicht (weg)zusammenhängend

(weg) zusammenhängend

Def: Eine Menge $M \subset \mathbb{C}$ heißt wegzusammenhängend wenn $\forall\, p,q \in M$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve

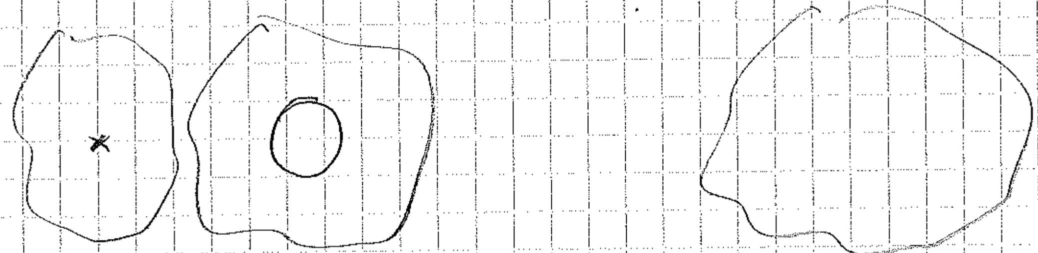
$$C: [0,1] \to M$$

mit $C(0) = p$ & $C(1) = q$ existiert

Bemerkung: Wenn $M$ offen ist (was meistens der Fall sein wird) gilt wegzusammenhängend ist equivalent mit zusammenhängend, was über eine Zerlegung der Menge definiert ist. Daher werden wir das „weg" meistens weglassen

Damit können wir nur für (Weg) zusammenhängende Mengen das Kurvenintegral zwischen zwei Punkten definieren, da zwischen zwei beliebigen Punkten immer eine Kurve gefunden werden kann.

Deswegen wird es im Folgenden eine wichtige Rolle spielen ob die Definitionsbereich „Löcher" aufweist.



nicht einfach zusammenhängend | einfach zusammenhängend

Definition: Sei $U$ offen und $c: [a,b] \to U$ eine stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurve dann heißt $c$ zusammenziehbar in $U$ wenn es eine stetige Abbildung (Homotopie) und einen Punkt $p \in U$ gibt

$$h: [0,1] \times [a,b] \to U$$

$h(0,t) = c(t)$ — Originalkurve

$h(1,t) = p$ — Kontraktion auf Punkt $p$

$h(s,a) = h(s,b)$ — Kurve bleibt geschlossen $\forall s$

Definition: Eine offene Menge heißt einfach zusammenhängend wenn sie zusammenhängend ist und jede Schleife zusammenziehbar ist.

D.h. auf einfach zusammenhängenden Gebieten können wir immer einen Weg zwischen zwei Punkten finden und verschiedene Wege beliebig ineinander verformen

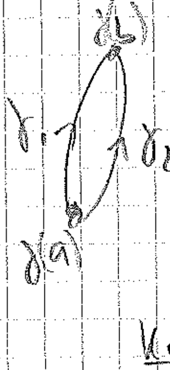
## Cauchyscher Integralsatz

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend und $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph, dann gilt für Kurvenintegrale

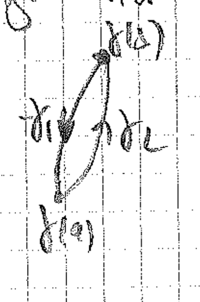
$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$$

für jede zusammenziehbare stückweise stetig differenzierbare Schleife in $U$

Korollar: Das Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)\,dz$ hängt nur vom Endpunkt ab




$\longrightarrow$




$= 0 \implies \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$

Korollar: Die Funktion $f$ besitzt eine Stammfunktion $F: U \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$F(z) = \int_\gamma f(\tilde{z})\,d\tilde{z} \quad \text{mit } \gamma(a) = p \text{ beliebig}, \ \gamma(b) = z$$

D.h. auf offenen einfach zusammenhängenden Gebieten gibt es eine Stammfunktion genau dann wenn $f$ holomorph ist

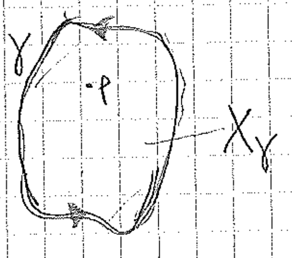
**Beweis:** Der einfachste Beweis ergibt sich aus dem Satz von Stokes für reelle Vektorfelder

Dazu stellen wir fest dass wir

$z = x + iy \qquad f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

$$\oint_\gamma dz\, f(z) = \oint_a^b dt \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) \cdot \begin{pmatrix} u(x(t), y(t)) \\ -v(x(t), y(t)) \end{pmatrix}$$

$$+\, i \oint_a^b dt \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) \cdot \begin{pmatrix} v(x(t), y(t)) \\ u(x(t), y(t)) \end{pmatrix}$$




Die reellen Kurvenintegrale der Vektorfelder $\begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$ lassen sich mit Hilfe des Satzes von Stokes als Flächenintegral darstellen

$$\oint_\gamma (F_x\, dx + F_y\, dy) = \int_{X_\gamma} dx\, dy \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

Da die Kurve zusammenziehbar ist liegen die eingeschlossenen Punkte $X_\gamma$ ebenfalls in $U$

$$\oint_\gamma dt \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} = \int_{X_\gamma} dx\, dy \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \underset{CR}{=} 0$$

und analog für

$$i \oint_\gamma dt \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) \cdot \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = \int_{X_\gamma} dx\, dy \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) \underset{CR}{=} 0$$

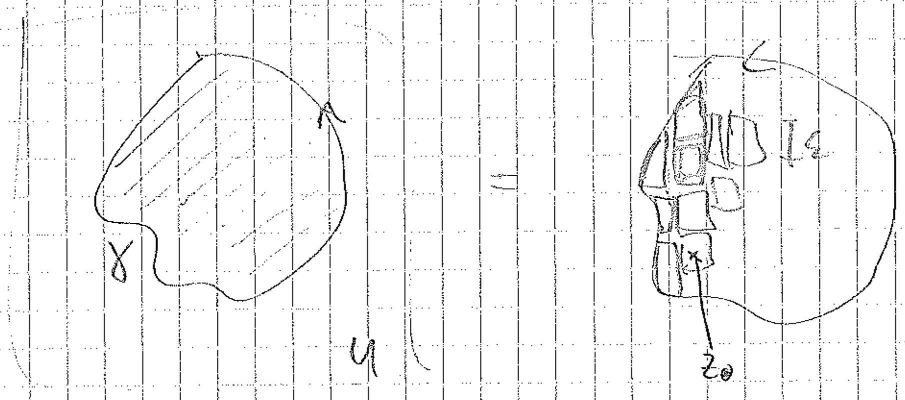
Damit lässt sich das Integral abschätzen als

$$\left| \int_{\square} O(|z-z_0|^2)\, dz \right| \leq C \underbrace{\varepsilon^2}_{M} \underbrace{\varepsilon}_{4L} \sim \varepsilon^3$$

Damit ist das gesamte Kurvenintegral gegeben durch

$$\left| \int dz\, f(z) \right| = \left| \underbrace{\sum_{\text{Maschen}}}_{\sim \frac{c'}{\varepsilon^2}} \int_{\square} f(z)\, dz \right| \leq \frac{c'}{\varepsilon^2}\, C \varepsilon^3 \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$$

Alternativ gilt der Beweis von Goursat
durch Unterteilung in Maschen der vorher kurz skizzieren




Skizze:
Da $f(z)$ holomorph gilt in jeder Masche

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + O((z-z_0)^2)$$

Damit ist der Beitrag jeder Masche

$$\oint_{\square} dz\, f(z) = \oint_{\square} \left( f(z_0) 1 + f'(z_0)(z-z_0) + O((z-z_0)^2) \right) dz$$

Haben Stammfunktion $\oint = 0$

$$= \oint_{\square} O((z-z_0)^2)\, dz$$

was durch das sogenannte ML Lemma abgeschätzt werden kann

ML Lemma: Sei $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ stückweise stetig differenzierbare Kurve und $f(z)$ stetig mit

$$|f(z)| \leq M \quad \forall\, z \in \gamma(t) \quad t \in [a,b]$$

dann gilt

$$\left| \int_{\gamma} dz\, f(z) \right| \leq ML \quad \text{wobei} \quad L = \int_a^b dt\, |\dot\gamma(t)|$$

die Länge des [illegible] ist

Beispiele:

1) Betrachte $f(z) = z^2$ holomorph auf $\mathbb{C}$

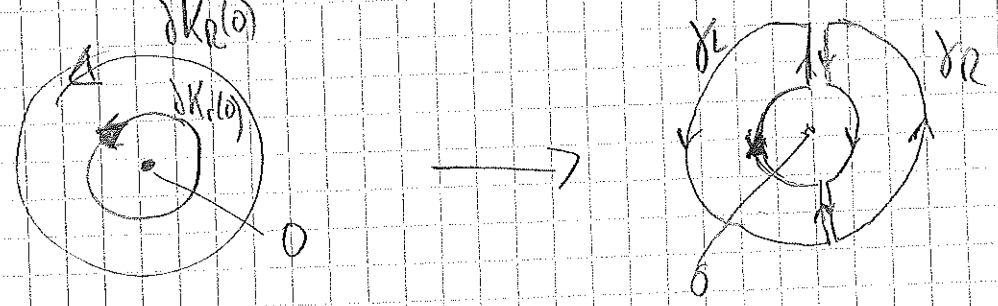
Damit entsprechend ist z.B. $\oint_{\partial K_R(0)} dz\, f(z) = 0$

2) Betrachte $f(z) = \frac{1}{z}$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Da $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nicht einfach zusammenhängend ist gilt der Satz nicht

Insbesondere ist $\oint_{\partial K_R(0)} dz\, f(z) = 2\pi i \neq 0$

Dennoch lässt sich mit dem Satz verstehen wenn das Integral nicht von $R$ abhängt




Betrachte $\int_{\partial K_R(0)} dz\, f(z) - \int_{\partial K_r(0)} dz\, f(z)$

dann lassen sich durch hinzufügen von Verbindungen der Wege geschlossene Konturen bilden

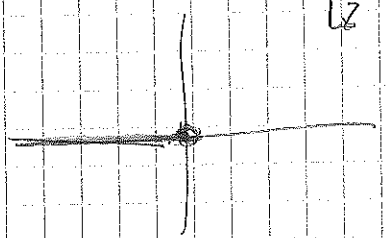
Die Beiträge der Verbindungen heben sich gegenseitig auf, entsprechend des Cauchy Integralsatzes ist aber

$\oint_{\gamma_L} dz\, f(z) = \oint_{\gamma_R} dz\, f(z) = 0 \Rightarrow \int_{\partial K_R(0)} dz\, f(z) - \int_{\partial K_r(0)} dz\, f(z)$

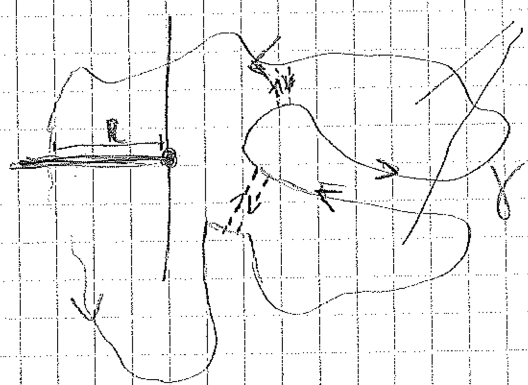
Diese Methode lässt sich auch auf komplizierten Gebieten erweitern

Betrachten wir z.B. eine Funktion $f(z)$ die auf einem geschlitzten Gebiet holomorph ist

<u>Bsp:</u> $f(z) = z^{1/n}$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_-\}$



dann können wir weiterhin auf $\mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_-\}$ den Cauchyschen Integralsatz anwenden

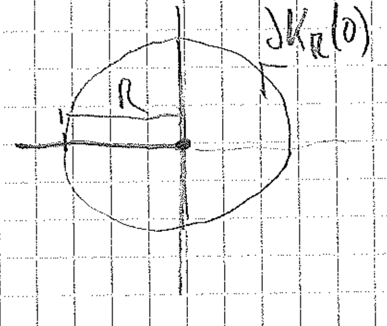



$f(z)$ holomorph

$$\oint dz\, f(z) = 0$$

Dann gilt

$$\oint_\gamma dz\, f(z) = \oint_{\partial K_R(0)} dz\, f(z)$$




Das heißt wir können zur Berechnung des Konturintegrals die Kontur geeignet deformieren