Wiederholung: Elementare Funktionen von $z \in \mathbb{C}$

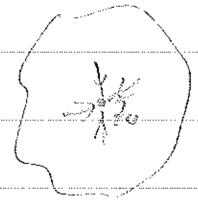
- Wurzeln komplexer Zahlen
  → Mehrwertigkeit, Haupt- & Neben-Zweige
  Eindeutigkeit durch Beschränkung auf z.B. Hauptzweig
  bringt Unstetigkeit der Funktion am branch cut
  wo verschiedene Zweige miteinander verknüpft sind
- Logarithmus komplexer Zahlen
  → Umkehrabbildung der Exponentialfunktion $\exp(z)$

$$\log(z) = \log(|z|) + i \arg(z)$$

Differenzierbarkeit von komplexen Funktionen

$f(z)$ komplex differenzierbar in z_0 wenn Grenzwert

$$\lim_{\delta z \to 0} \frac{f(z_0+\delta z) - f(z_0)}{\delta z} = f'(z_0) \quad \text{existiert}$$



Existenz des Grenzwerts bedeutet insbesondere dass Linearisierung der Funktion richtungsunabhängig ist

$$z = x+iy \qquad f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

$f(z)$ komplex differenzierbar
⇒ $u(x,y)$, $v(x,y)$ partiell differenzierbar bzgl. x, y

Darüber hinaus erfüllen komplex differenzierbare Funktionen notwendigerweise

CR Bedingungen: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Die CR Bedingungen haben auch eine anschauliche geometrische Bedeutung

Betrachten wir die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

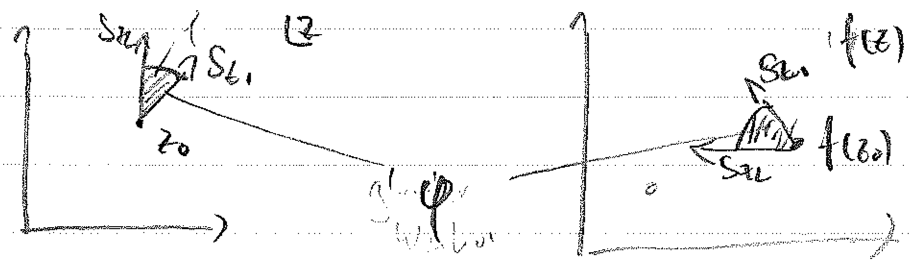
dann ist die Linearisierung dieser Abbildung gegeben durch die Jacobimatrix

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Die CR Bedingungen bedeuten dass sich J_f als <u>Drehstreckung</u> und damit als komplexe Multiplikation ausdrücken lässt

$$D = \begin{pmatrix} \lambda\cos\varphi & -\lambda\sin\varphi \\ \lambda\sin\varphi & \lambda\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Da Drehstreckungen winkelerhaltend sind ist eine holomorphe Funktion $f(z)$ <u>winkeltreu</u> überall dort wo $f'(z) \neq 0$ ist



Die CR-Bedingungen sind hinreichend für die komplexe Differenzierbarkeit wenn die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ stetig sind

Skizze des Beweises: Sei $\delta z = \delta x + i\delta y$, dann gilt

$$f(z+\delta z) - f(z) = u(x+\delta x, y+\delta y) - u(x,y) + i\big(v(x+\delta x, y+\delta y) - v(x,y)\big)$$

stetig partielle Differenzierbarkeit

$$\lim_{\delta y \to 0} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y+\delta y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\delta y\right) + O(\delta^2)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial v}{\partial y} i\delta y + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y + \frac{\partial v}{\partial x} i\delta x + O(\delta^2)$$

Cauchy-Riemann CR

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(\delta x + i\delta y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\delta x + i\delta y) + O(\delta^2)$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\delta x + i\delta y) + O(\delta^2)$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\delta z + O(\delta^2)$$

Damit existiert der Grenzwert $\delta z \to 0$ unabhängig von der Richtung

Definition: Eine Funktion $f(z)$ heißt <u>holomorph</u> in einer offenen Menge G wenn $f(z)$ $\forall z \in G$ komplex differenzierbar ist

Beispiele für komplexe Differenzierbarkeit / Holomorphizität

$$f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u(x,y)} + i\underbrace{2xy}_{v(x,y)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y = -\frac{\partial u}{\partial y} \checkmark$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x = \frac{\partial u}{\partial x} \checkmark$$

Cauchy-Riemann erfüllt
$\Rightarrow f(z)$ komplex differenzierbar

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 2x + i2y = 2(x+iy) = 2z$$

wie erwartet

$$f(z) = z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = \underbrace{x^2+y^2}_{u(x,y)} \qquad v(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

nicht komplex differenzierbar

Eine wichtige Konsequenz ist dass
für $f'(z_0) \neq 0$ eine lokale Umkehrfunktion
von f existiert die wieder holomorph ist

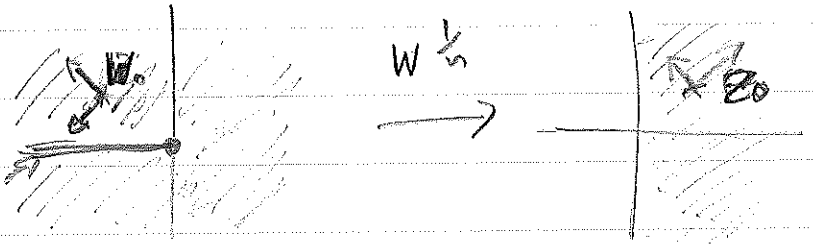
Die Ableitung der Umkehrfunktion
$f^{-1}(z)$ ergibt sich durch Invertierung der Drehstreckung

d.h. für $w_0 = f(z_0)$

$$\left(f^{-1}\right)'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

<u>Beispiel</u>: $W(z) = f(z) = z^n$ $\qquad f^{-1}(w) = w^{\frac{1}{n}}$

$n=2$ Halbebene



Dann gilt $\left(f^{-1}\right)'(w_0) = \frac{d}{dw} w^{\frac{1}{n}}\Big|_{w=w_0}$

$$= \frac{1}{f'(z_0)} = \frac{1}{n z_0^{n-1}} = \frac{z_0}{n z_0^n} = \frac{w_0^{\frac{1}{n}}}{n w_0}$$

$$= \frac{1}{n} w_0^{\frac{1}{n}-1}$$

So we obtain $\boxed{\frac{d}{dz} z^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1}}$ for all $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}^-\}$

i.e. outside the branch cut

Die Ableitungsregeln der reellen Analysis lassen sich ohne weitere Probleme auf komplexe Ableitungen erweitern, da ihr Beweis im wesentlichen auf der Existenz von Grenzwerten zurückzuführen ist.

Insbesondere gelten die folgenden Rechenregeln

<u>Monome:</u> $f(z) = z^n \Rightarrow f'(z) = n z^{n-1} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad n \in \mathbb{N}$

Sei $f(z)$, $g(z)$ holomorph auf G, dann gilt $\forall z \in G$

<u>Summenregel:</u> $\frac{d}{dz}\left(f(z)+g(z)\right) = f'(z) + g'(z)$

<u>Produktregel:</u> $\frac{d}{dz}\left(f(z) \cdot g(z)\right) = f'(z)\, g(z) + f(z)\, g'(z)$

Des weiteren gilt für $g: G \to G_1$ holomorph
und $f: G_1 \to G_2$ holomorph
$\forall z \in G$

<u>Kettenregel:</u> $\frac{d}{dz}\left(f\left(g(z)\right)\right) = f'\left(g(z)\right) g'(z)$

Damit folgt automatisch die

<u>Quotientenregel:</u> $$\frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = \left(\frac{f'(z)}{g(z)} + f(z)\frac{d}{dz}\frac{1}{g(z)}\right) = \frac{f'(z)\, g(z) - f(z)\, g'(z)}{g^2(z)}$$

Die Cauchy-Riemann Bedingungen liefern einige nicht-triviale Eigenschaften der Funktion, insbesondere mit Hinblick auf das Verhalten des Real- und Imaginärteils

Betrachte $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ holomorph, dann gilt

i) $$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

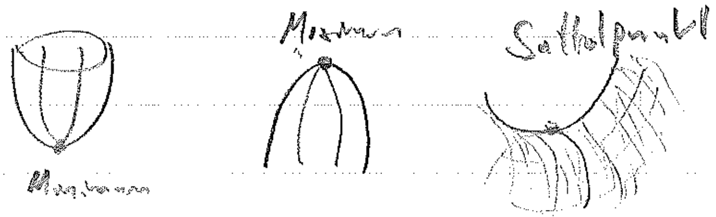
Da u, v zweimal stetig partiell differenzierbar sind (Beweis später)

$$= 0$$

analog folgt $\Delta v = 0$

Damit gilt also $\Delta u = \Delta v = 0$
d.h. Real- und Imaginärteil der Funktion sind <u>harmonisch</u>

Das hat einige wichtige Konsequenzen für das Verhalten der Funktionen u,v
z.B. können u,v keine lokalen Minima oder Maxima haben sondern lediglich Sattelpunkte



Damit $U(x,y)$ ein lokales Minimum oder Maximum hat muss $\frac{\partial}{\partial x}U(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}U(x,y) = 0$ gelten.

Damit es sich um ein Minimum oder Maximum handelt muss außerdem die Hessematrix positiv/negativ definit sein*

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Es gilt aber $tr[H] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, d.h. die Eigenwerte haben unterschiedliche Vorzeichen.

Damit fällt die Funktion in eine Richtung ab und steigt in die andere an.

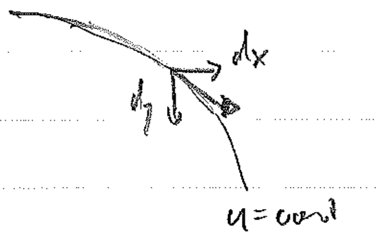
*Wir nehmen der Einfachheit halber an dass die zweiten Ableitungen nicht verschwinden. Die Aussage wird im weiteren Verlauf der Vorlesung allgemein bewiesen.

Das nahm darstellen die CR Bedingungen Informationen über die Entwicklung von Real- und Imaginärteil

Betrachtet man z.B. die Equipotentialflächen

$$u(x,y) = \text{const} \qquad v(x,y) = \text{const}$$

so gilt für die Tangentialvektor



$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy = (dx, dy) \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$dv = (dx, dy) \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

so dass für $f'(z) \neq 0$ der Winkel zwischen den Tangentialvektoren

$$\cos\theta_{uv} \propto \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\overset{CR}{=} -\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

D.h. die Tangentialvektoren für Real- und Imaginärteil stehen senkrecht aufeinander