Wiederholung: Green's Funktionen

Bsp: $(\partial_t^2 + \varepsilon \partial_t + \omega_0^2)\phi(t) = f(t)$ (*)

Betrachte $(\partial_t^2 + \varepsilon \partial_t + \omega_0^2)\, G(t,t_0) = \delta(t-t_0)$

dann ist $\phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt_0 \, G(t,t_0)\, f(t_0)$ eine Lösung von (*)

Berechnung mittels FT in t

$$\tilde{G}(\omega, t_0) = \frac{e^{-i\omega t_0}}{-\omega^2 + i\varepsilon\omega + \omega_0^2}$$

Greensfunktion $G(t,t_0)$ via inverse FT

$$G(t,t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \, \frac{e^{-i\omega t_0}}{-\omega^2 + i\varepsilon\omega + \omega_0^2}\, e^{i\omega t}$$

mittels Vervollständigung zu Konturintegral und Residuensatz

$\boxed{\lim_{\varepsilon \to 0}}$ $\omega = \pm\omega_0 + \frac{i\varepsilon}{2}$

$$\operatorname{res}_{\omega = \pm\omega_0 + \frac{i\varepsilon}{2}} \left(\frac{e^{i\omega(t-t_0)}}{-\omega^2 + i\varepsilon\omega + \omega_0^2} \right)$$

$$= \operatorname{res}_{\omega = \pm\omega_0 + \frac{i\varepsilon}{2}} \frac{-e^{i\omega(t-t_0)}}{\left(\omega - \omega_0 - \frac{i\varepsilon}{2}\right)\left(\omega + \omega_0 - \frac{i\varepsilon}{2}\right)}$$

mit Residuensatz

$$G(t,t_0) = \frac{1}{\omega_0}\, \theta(t-t_0)\, \sin(\omega_0(t-t_0))$$

II.6 Laplace- und Mellintransformation

Betrachte Laplacetransformation für $p \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}[f(t)](p) = \int_0^\infty dt\, f(t)\, \underbrace{e^{-pt}}_{=K(p,t)} \quad \text{Kernel}$$

eingeschränkt auf $\mathbb{R}^+$

Genau wie alle Integraltransformationen (Fourier, Laplace, Mellin, ...) ist $\mathcal{L}$ linear

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha\, \mathcal{L}[f(t)] + \beta\, \mathcal{L}[g(t)]$$

Durch die Beschränkung auf $[0,\infty)$ ändern sich die Eigenschaften der Transformation gegenüber Fouriertransformation, was z.B. Ableitungen und Faltungen betrifft.

Existenz der Laplacetransformation

Bei Fouriertransformation musste $f(t)$ auf $\mathbb{R}$ betragsmäßig integrierbar sein um Existenz der Fouriertransformation zu garantieren

Bei Laplacetransformation reicht es aus, wenn $f(t)$ auf $\mathbb{R}^+$ keine Singularitäten besitzt und höchstens „exponentiell anwächst", d.h. wächst

Sei $\gamma \in \mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}$:

$$|f(t)\, e^{-\gamma t}| \leq M \quad \forall \; t \geq t_0$$

dann existiert $L[f(t)](p) \;\; \forall \; p$ mit $\mathrm{Re}(p) > \gamma$

denn es gilt

$$\left| \int_0^\infty dt\, f(t)\, e^{-pt} \right| \leq \int_0^\infty dt\, |f(t)\, e^{-pt}|$$

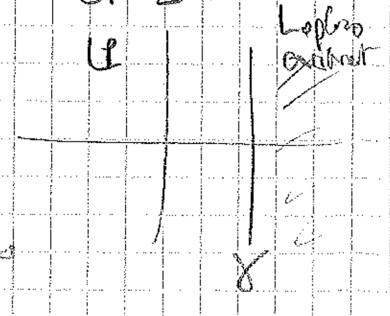
$$\leq \underbrace{\int_0^{t_0} dt\, |f(t)\, e^{-pt}|}_{\equiv C < \infty \text{ da keine Singularitäten auf Intervall endlich}} + \int_{t_0}^\infty dt\, |f(t)\, e^{-pt}|$$

$$\leq C + \int_{t_0}^\infty dt\, |f(t)|\, e^{-\mathrm{Re}(p)t}$$

$$\leq C + \int_{t_0}^\infty dt\, \underbrace{|f(t)\, e^{-\gamma t}|}_{\leq M}\, e^{\underbrace{-(\mathrm{Re}(p)-\gamma)}_{\leq 0} t}$$

$$< \infty$$

D.h. für Funktionen mit obigen Eigenschaften existiert $L[f(t)](p)$ auf einem komplexen Halbraum. Durch analytische Fortsetzung kann die Laplacetransformation auf $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden. Dabei können allerdings Singularitäten auftreten, da die Konvergenz des Integrals nicht garantiert werden kann.



Beispiele für nicht Laplace transformierbare Funktionen

$f(t) = e^{t^2}$ Divergiert zu schnell für $t \to \infty$

$e^{t^2 - pt} \to \infty \quad \forall p$

$f(t) = t^n$ für $n \leq 1$ da

für $n \leq 1$ $\int_0^1 dt\, t^n e^{-pt}$ divergiert

Beispiele für Laplace Transformierte:

$f(t) = 1 \qquad L[1](p) = \int_0^\infty dt\, e^{-pt} = \frac{1}{-p} e^{-pt}\Big|_0^\infty = \frac{1}{p}$

Besitzt Singularität bei $p = 0$, aber Laplace Transformation existiert für $\mathrm{Re}(p) > 0$

$f(t) = t \qquad L[t](p) = \int_0^\infty dt\, t\, e^{-pt} = \int_0^\infty dt\, (-\partial_p) e^{-pt} = -\partial_p L[1](p)$

$= -\partial_p \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2}$

analog für $f(t) = t^n$ mit $n \in \mathbb{N}$

$$L[t^n](p) = \frac{\partial^n}{\partial p^n} \frac{1}{p} = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

allgemeiner $n \in \mathbb{R}$ mit $n > -1$ und $\mathrm{Re}(p) > 0$

$$L[t^n](p) = \int_0^\infty dt\, t^n e^{-pt} = \frac{1}{p^{n+1}} \int_0^\infty ds\, s^n e^{-s} = \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$$

$s = tp$

wobei wir für komplexe p zusätzlich eine Konturdeformation vorgenommen haben

Exponentialfunktion, hyperbolische und trigo. Funktionen

$$f(t) = e^{kt} \qquad \mathcal{L}[e^{kt}](p) = \int_0^\infty dt\; e^{-(p-k)t}$$

$$= \left. \frac{-e^{-(p-k)t}}{(p-k)} \right|_0^\infty$$ konvergent für $\mathrm{Re}(p-k) > 0$

$$\mathcal{L}[e^{kt}](p) = \frac{1}{p-k}$$

$$f(t) = \cosh(kt) = \frac{1}{2}\left(e^{kt} + e^{-kt}\right)$$

$$\mathcal{L}[\cosh(kt)](p) \overset{\text{Linearität}}{=} \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{kt}](p) + \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-kt}](p)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-k} + \frac{1}{p+k}\right)$$

$$= \frac{p}{p^2-k^2} \quad \text{mit } \mathrm{Re}(p-k) > 0$$

$$f(t) = \sinh(kt) = \frac{1}{2}\left(e^{kt} - e^{-kt}\right)$$

$$\mathcal{L}[\sinh(kt)](p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-k} - \frac{1}{p+k}\right)$$

$$= \frac{k}{p^2-k^2} \quad \text{mit } \mathrm{Re}(p-k) > 0$$

$$f(t) = \cos(kt) = \cosh(ikt)$$

$$\mathcal{L}[\cos(kt)](p) = \frac{p}{p^2-(ik)^2} = \frac{p}{p^2+k^2}$$

$$f(t) = \sin(kt) = \frac{1}{i}\sinh(ikt)$$

$$\mathcal{L}(\sin(kt)) = \frac{ik}{i(p^2-(ik)^2)} = \frac{k}{p^2+k^2}$$

Eigenschaften der Laplacetransformation

Ableitungen: $L[f'(x)] = \int_0^\infty dt\, e^{-pt} f'(t)$

$$\overset{\text{partielle Integration}}{=} e^{-pt} f(t) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty dt\, (-p)\, e^{-pt} f(t)$$

$$= \underline{-f(0)} + p\, L[f(x)](p)$$

D.h. im Gegensatz zur Fouriertransformation erhalten wir hier einen allgemeinen „Randterm", der den „Anfangswert" der Funktion entspricht

$$L[f''(x)](p) = L[g'(x)](p) \quad \text{mit } g' = f$$

$$= p\, L[g(x)](p) - g(0)$$

$$= p\left(p L[f(x)](p) - f(0)\right) - f'(0)$$

$$= p^2 L[f(x)] - p f(0) - f'(0)$$

analog n-te Ableitung

$$\underline{L[f^{(n)}(x)](p) = p^n L[f(x)] - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)}$$