Wiederholung: Fouriertransformation

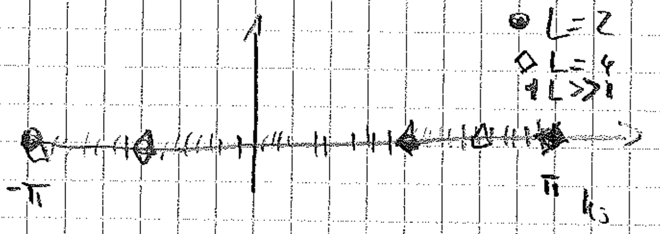
Darstellung periodischer Fkt als Fourierreihe $f_\pi(x): [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$

$$f_\pi(y) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j\, e^{ijy}$$

$$c_j = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dy\, e^{-ijy} f_\pi(y)$$

Verallgemeinerung auf $[-L;L]$ $\quad f_L(x) = f_\pi\left(\frac{x\cdot\pi}{L}\right)$

$$f_L(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j\, e^{i\underbrace{\frac{j\pi}{L}}_{=k_j}x}$$



Frequenzabstand $\Delta k = \frac{\pi}{L}$

D.h. im lim $L\to\infty$ Übergang zu kontinuierlichen Frequenzen $k_j \to k \in \mathbb{R}$

Def: $\tilde f(k_j) = \frac{2\pi c_j}{\Delta k}$

dann gilt im lim $L\to\infty$

$$\boxed{f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\,\tilde f(k)\, e^{ikx}}$$

inverse Fouriertransformation

Die Fourieramplituden $\tilde f(k)$ erhalten wir analog aus

$$\tilde f_L(k_j) = \frac{2\pi}{\Delta k}c_j = \frac{2\pi}{\Delta k}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dy\, e^{-ijy} f_\pi(y)$$

$$\overset{y=\Delta k x}{=} \int_{-L}^{+L} dx\, e^{-ik_jx} f_L(x)$$

damit ist im lim $L\to\infty$

$$\boxed{\tilde f(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ikx} f(x)}$$

Fouriertransformation

Existenz von Fouriertransformation wenn $f(x)$ betragsmäßig integrierbar von $-\infty$ bis $+\infty$

<u>Eigenschaften der Fouriertransformation:</u>

Ableitung $\mathcal{F}[f^{(n)}(x)](k) = (ik)^n \, \mathcal{F}[f(x)](k)$

Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, f(x) = \mathcal{F}[f(x)](k=0)$

Darstellung der δ-Funktion

Betrachte $f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx}\, \tilde{f}(k)$ mit invertierbarer Fourierdarstellung

mit $\tilde{f}(k) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-iky}\, f(y)$ dann gilt durch einsetzen

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-iky}\, f(y)$$

Durch Vertauschen der Integrationen ergibt sich

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ik(x-y)}\, f(y)$$

andererseits ist $\delta(x-y)$ gerade so definiert, dass

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy\, \delta(x-y)\, f(y)$$

also ergibt sich folgende Darstellung

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{ik(x-y)} = \delta(x-y)}$$

Damit lassen sich nun einige Fouriertransformationen einfach berechnen, z.B.

$$f(x) = 1 \Longrightarrow \tilde{f}(k) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ikx} = 2\pi\, \delta(k)$$

$$f(x) = \delta(x) \longrightarrow \tilde{f}(k) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ikx}\, \delta(x) = 1$$

$$f(x) = e^{ik_0 x} \longrightarrow \tilde{f}(k) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ikx}\, e^{ik_0 x} = 2\pi\, \delta(k-k_0)$$

$$f(x) = \sum_j e^{ik_j x} \longrightarrow \tilde{f}(k) = \sum_j 2\pi\, \delta(k-k_j)$$

d.h. die Fouriertransformation entspricht einer [illegible] oder Frequenzanalyse

Konvolutionen / Integralfaltung

Betrachte $$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \; g(y)\, h(x-y)$$

$$\mathcal{F}[f(x)](k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \; e^{-ikx} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \; g(y)\, h(x-y)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, e^{-ik(x-y)} e^{-iky} \; g(y)\, h(x-y)$$

Vertausche Integrationen und substituiere $x-y=s$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} ds \; e^{-iky} g(y) \; e^{-iks} h(s)$$

$$= \tilde{g}(k)\, \tilde{h}(k) = \mathcal{F}[g(x)](k)\; \mathcal{F}[h(x)](k)$$

D.h. die Fouriertransformation überführt eine komplizierte Faltung in ein <u>einfaches Produkt</u>!

Produkte von Funktionen:

Betrachte $$f(x) = g(x)\, h(x)$$

$$\mathcal{F}[f(x)](k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \; e^{-ikx} \; g(x)\, h(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \; e^{-ikx} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_2}{2\pi} \; e^{ik_1x} e^{ik_2x} \; \tilde{g}(k_1)\, \tilde{h}(k_2)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_2}{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx \; e^{i(k_1+k_2-k)x}}_{=2\pi\,\delta(k_1+k_2-k)} \; \tilde{g}(k_1)\, \tilde{h}(k_2)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_1}{2\pi} \; \tilde{g}(k_1)\, \tilde{h}(k-k_1)$$

D.h. umgekehrt wird ein Produkt in eine Faltung überführt.
Die Frequenzen k_1 sind linear additiv d.h. es gilt $k_1 + (k-k_1) = k$

Frequenzumkehr / Komplexe Konjugation:

Betrachten wir $\mathcal{F}\left[f^*(x)\right](k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\; f^*(x)\, e^{-ikx}$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\; \left[f(x)\, e^{+ikx}\right]^*$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{+ikx}\right]^* = \left[\mathcal{F}\left[f(x)\right](-k)\right]^*$$

d.h. $\widetilde{f^*}(k) = \left[\tilde{f}(-k)\right]^*$

Insbesondere für reelle Funktionen mit $f^*(x) = f(x)$ gilt also

$$\tilde{f}(k) = \left[\tilde{f}(-k)\right]^*$$

Betrachten wir nun das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\; |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\; f(x)\, f^*(x)$$

$$\overset{\text{entsprechend Produktregel}}{=} \int \frac{dk}{2\pi}\; \tilde{f}(k)\, \underbrace{\widetilde{f^*}(-k)}_{=\left[\tilde{f}(k)\right]^*}$$

$$= \int \frac{dk}{2\pi} \left|\tilde{f}(k)\right|^2$$

D.h. z.B. in Physikalischen Anwendungen das

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt\; \underbrace{|f(t)|^2}_{\text{Signalstärke als Fkt. der Zeit } t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\; \underbrace{\left|\tilde{f}(\omega)\right|^2}_{\text{Signalstärke bei Frequenz } \omega}$$

<u>Beispiele:</u> <u>Diffusionsgleichung</u>

$\partial_t \phi(x,t) = \underset{\substack{\wedge \\ \text{Diffusionskonstante}}}{D}\, \partial_x^2 \phi(x,t)$ = beschreibt $\phi = \phi(x,t)$ für [illegible]

+ Anfangsbedingung z.B. $\phi(x,t=0) = \delta(x)$

Lösung partieller DGL erster Ordnung mittels Fouriertransformation

- Betrachte Fouriertransformation der DGL

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\; e^{-ikx}\, \partial_t \phi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\; e^{-ikx}\, D \partial_x^2 \phi(x,t)$$

$$\Rightarrow \qquad \partial_t \tilde{\phi}(k,t) = -Dk^2\, \tilde{\phi}(k,t)$$

liefert ODE für Fouriermoden $\tilde{\phi}(k,t)$

- Fouriertransformation der Anfangsbedingungen

$$\tilde{\phi}(k,t=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\; e^{-ikx}\, \phi(x,t=0) \overset{\phi(x,t=0)=\delta(x)}{=} 1$$

$\Rightarrow$ Lösung im Fourierraum

$$\tilde{\phi}(k,t) = e^{-k^2 D t}$$

- Inverse Fouriertransformation zur Lösung im Ortsraum

$$\phi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx}\, \tilde{\phi}(k,t) = \int \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx}\, e^{-Dk^2 t}$$

Berechnung des Integrals mit Hilfe der Funktionentheorie

quadratische Ergänzung

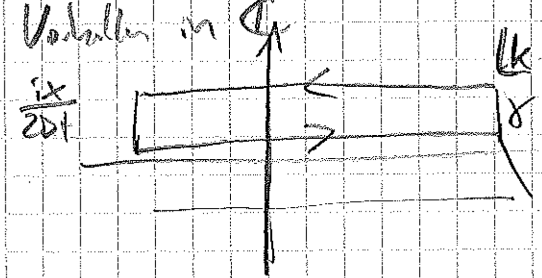
$$ikx - Dtk^2 = -Dt\left(k^2 - \frac{ikx}{Dt}\right)$$

$$= -Dt\left(k - \frac{ix}{2Dt}\right)^2 - \frac{x^2}{4Dt}$$

$$\to \quad \phi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{-Dt\left(k-\frac{ix}{2Dt}\right)^2} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

$$= e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}\, \underbrace{e^{-Dt\left(k-\frac{ix}{2Dt}\right)^2}}_{\text{holomorphe Funktion}}$$

Betrachte Verhalten in $\mathbb{C}$



$$\int_\gamma e^{-Dt\left(k-\frac{ix}{2Dt}\right)^2} = 0$$

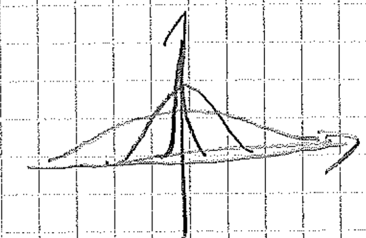
Daher können wir die Integrationskontur um $\frac{ix}{2Dt}$ shiften, so dass

$$\phi(x,t) = e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{-Dtk^2} \quad !$$

Gauss Integral mit $\sigma^2 = \frac{1}{2Dt}$

$$= \frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{2Dt}}$$

$$\Rightarrow \quad \phi(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{\sqrt{4\pi Dt}}$$



D.h. die Lösung beschreibt das Ausbreiten einer Gaussverteilung in x-Richtung mit Breite $\sigma^2 = 2Dt$

Wellengleichung (1D)

$$\partial_t^2 \phi(x,t) = \underbrace{v^2}_{\text{Ausbreitungsgeschwindigkeit}} \partial_x^2 \phi(x,t)$$

gesucht $\phi(x,t)$
für $\phi(x,t=0) = f(x)$
und $\partial_t \phi(x,t=0) = g(x)$

- Betrachte FT der DGL

$$\partial_t^2 \tilde{\phi}(k,t) = -v^2 k^2 \tilde{\phi}(k,t)$$

$\Rightarrow$ ODE zweiter Ordnung für $\tilde{\phi}(k,t)$ für jedes k

allgem. Lösung $\quad \tilde{\phi}(k,t) = C_1(k)\, e^{ivkt} + C_2(k)\, e^{-ivkt}$

- Fouriertransformation der AB

$$\tilde{\phi}(k,t=0) = \tilde{f}(k)$$

$$\partial_t \tilde{\phi}(k,t)\big|_{t=0} = \tilde{g}(k)$$

Vergleich mit allgem. Lösung

$$\tilde{\phi}(k,t=0) = C_1(k) + C_2(k)$$

$$\partial_t \tilde{\phi}(k,t=0) = ivk\left(C_1(k) - C_2(k)\right)$$

$$\Rightarrow \quad C_1(k) = \frac{1}{2}\left(\tilde{f}(k) + \frac{\tilde{g}(k)}{ivk}\right)$$

$$C_2(k) = \frac{1}{2}\left(\tilde{f}(k) - \frac{\tilde{g}(k)}{ivk}\right)$$

- Inverse Fouriertransformation Lösung im Ortsraum

$$\phi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk \left(C_1(k)\, e^{ivkt} + C_2(k)\, e^{-ivkt}\right) e^{ikx}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk \left(\tilde{f}(k) + \frac{\tilde{g}(k)}{ivk}\right) e^{ik(x+vt)} + \left(\tilde{f}(k) - \frac{\tilde{g}(k)}{ivk}\right) e^{ik(x-vt)}$$