Wiederholung

Darstellung von periodischen Funktionen in ONB des Funktionenraums

oBdA $f: [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$

Fourierreihe $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$

trig. Reihe: $f(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$

mit Koeffizienten bestimmt durch Skalarprodukt

Fourierkoeffizienten: $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, e^{-inx} f(x)$

trig. Koeffizienten: $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \frac{1}{\sqrt{2}} f(x)$

$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \cos(nx) f(x)$

$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \sin(nx) f(x)$

offensichtlich besteht ein Zusammenhang zwischen trig. Koeffizienten & Fourierkoeffizienten

Konvergenz von Fourierreihen (im quadratischen Mittel) gewährleistet wenn $f(x)$ Riemann integrierbar

II.5 Integraltransformationen & Fouriertransformation

Bisher Fourierreihendarstellung periodischer Funktionen auf $[a,b]$ nun Erweiterung auf $\mathbb{R}$

Spezialfall einer Integraltransformation, wodurch für gegebene $f(t)$ eine neue Funktion $\tilde{f}(\omega)$

$$\tilde{f}(\omega) = \int_a^b dt \; K(\omega,t)\, f(t)$$

definiert wird

<u>Bsp:</u>
- Fouriertransformation $K(\omega,t) = e^{i\omega t}$ auf $[a,b] = \mathbb{R}$
- Laplacetransformation $K(\omega,t) = e^{-\omega t}$ auf $[a,b] = \mathbb{R}_+$
- Mellintransformation $K(\omega,t) = t^{\omega-1}$ auf $[a,b] = \mathbb{R}_+$

In vielen Problemen der Physik, z.B. beim Lösen von DGLs nützlich, da sie die Struktur der Gleichungen vereinfacht

<u>Grundlegende Idee:</u>

$$\begin{tikzcd}
\text{Problem für } f(t) \arrow[rr, "\int\text{-Transformation}"] \arrow[d, dashed, "\text{schwierig}"'] & & \text{Problem für } \tilde{f}(\omega) \arrow[d, "\text{einfach}"] \\
\text{Lösung } f_0(t) & & \text{Lösung } \tilde{f}_0(\omega) \arrow[ll, "\text{Inverse}", "\int\text{-Transformation}"']
\end{tikzcd}$$

D.h. zur Lösung des Problems werden wir i.d.R. auch die Inverse (oder Rücktransformation) benötigen

Fouriertransformation als Grenzwert der Fourierreihe

Betrachte zunächst

$f_\pi(y)$ mit $y \in [-\pi, \pi]$ dann ist für geeignete Funktionen

$$f_\pi(y) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j \, e^{ijy} \quad \text{mit} \quad c_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dy \; e^{-ijy} f_\pi(y)$$

als Fourierreihe darstellbar

Durch Abbildung des Intervalls, können wir die uns auf ein beliebiges Intervall $[-L, L]$ erweitern und anschließend den $\lim_{L\to\infty}$ betrachten

Definiere $x = \frac{L}{\pi} y$ mit $x \in [-L, L]$ für $y \in [-\pi, \pi]$

dann ist die neue Funktion f_L gegeben durch f_π als

$$f_L(x) = f_\pi\left(y = \frac{\pi}{L} x\right) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j \, e^{ij\frac{\pi}{L}x}$$

mit

$$c_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dy \; e^{-ijy} f_\pi(y) \qquad y = \frac{\pi}{L} x$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{L} dx \, \frac{\pi}{L} \, e^{-ij\frac{\pi}{L}x} f_L(x) \qquad \text{da } f_\pi\left(\frac{\pi}{L}x\right) = f_L(x)$$

Damit liegen die Frequenzen $k_j = j\frac{\pi}{L}$ für $L \to \infty$ beliebig dicht beieinander mit Abstand $\Delta k = \frac{\pi}{L}$

Definiere $\tilde{f}(k_j) = \frac{2\pi}{\Delta k} c_j$ dann ist

$$\tilde{f}(k_j) = \int_{-L}^{L} dx \; e^{-ik_j x} f(x)$$

und mit $c_j = \frac{\Delta k}{2\pi} \tilde{f}(k_j)$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Delta k \; \tilde{f}(k_j) \, e^{ik_j x}$$

Dementsprechend erhalten wir für $L \to \infty$
$\Delta k \to 0$, k_j dicht in $\mathbb{R}$ so dass

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{f}(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ikx} f(x) \qquad \text{Fouriertransformation} \\ f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{+ikx} \tilde{f}(k) \qquad \text{Inverse Fouriertransformation} \end{aligned}}$$

Dabei ist für $L \to \infty$ die Periode von $f(x)$ unendlich, das lässt sich z.B. dadurch realisieren dass für $x \to \pm\infty$ $f(x)$ verschwindet

Die Existenz von $\tilde{f}(k)$ kann in der Tat gewährleistet werden wenn $f(x)$ betragsmäßig integrierbar ist, i.e. für $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ also $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |f(x)| < \infty$ gilt

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ikx} f(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \underbrace{|e^{-ikx}|}_{=1} |f(x)| < \infty$$

damit $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ muss also dass $f(x \to \pm\infty) = 0$ gelten

<u>Bemerkung:</u> Es existieren unterschiedliche Konventionen für die Verteilung des Vorfaktors $\frac{1}{2\pi}$

- asymmetrisch ($\frac{1}{2\pi}$ bei einem)
- symmetrisch ($\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ bei beiden)

Ebenso existieren unterschiedliche Konventionen für das Vorzeichen $e^{\pm ikx}$

D.h. bei der Anwendung ist stets darauf zu achten welche Konvention vorliegt

<u>Notation:</u> $\tilde{f}(k) = \mathcal{F}[f(x)](k)$, $f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{f}(k)](x)$

Eigenschaften der Fouriertransformation

Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx}\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx}\, ik\tilde{f}(k)$$

D.h. die Fouriertransformation überführt Ableitungen in Multiplikation mit (ik), analog

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk}{(2\pi)}\, e^{ikx}\,(ik)^n\tilde{f}(k)$$

Damit spricht d mit

$$\mathcal{F}[f'(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty}dx\; e^{-ikx}f'(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}dx\;\frac{d}{dx}\left(e^{-ikx}f(x)\right) - \int_{-\infty}^{+\infty}dx\left(\frac{d}{dx}e^{-ikx}\right)f(x)$$

$$= \underbrace{e^{-ikx}f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{\substack{=0 \text{ da sonst} \\ \text{FT nicht existent}}} + ik\,\tilde{f}(k)$$

also $$\boxed{\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (ik)^n\tilde{f}(k)}$$

Integration:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}dx\, f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}dx\; e^{-ikx}f(x)\Big|_{k=0} = \tilde{f}(k=0)$$