Wiederholung: Lineare Algebra

Dualer VR V^* zu V

$$V^* = \{ L : V \to K \quad v \mapsto L(v) \text{ linear} \}$$

für V Hilbertraum ist $V^* \cong V$

$\to$ Wechselwirkung von Elementen $v^* \in V^*$ und $v \in V$

Dirac Notation $\quad v^* = \langle v|$

$\quad v = |v\rangle$

$$v^*(u) = \langle v|u\rangle = \langle v, u\rangle$$

Darstellung in ONB $\{e_i\}$ von V

dann ist $\{e_i^*\} = \{\langle e_i|\}$ auch ONB von V^*

Vollständigkeitsrelation $\sum_j |e_j\rangle\langle e_j| = \mathbb{1}$

$$|u\rangle = \sum_j \underbrace{|e_j\rangle}_{\text{Basisvektor}} \underbrace{\langle e_j|u\rangle}_{= \lambda_j \text{ linearer Koeffizient}}$$

II.2 Beispiele für Funktionenräume VR

Durch Abstrahieren der Begriffe können wir nun z.B. Mengen von Funktionen als VR betrachten

Betrachte $f: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to K$ (z.B. $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$)

$$x \longmapsto f(x)$$

und definiere Addition $\oplus$ und skalare Multiplikation wie üblich

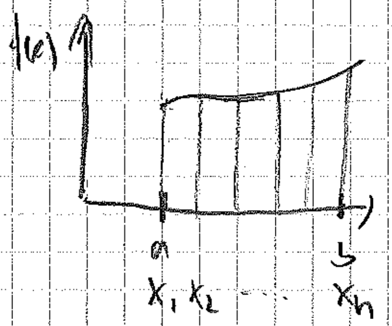
$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda \odot f)(x) = \lambda f(x)$$

dann bildet z.B. die Menge der stetigen Funktionen $C^0([a,b],\mathbb{R})$ einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ da VR Axiome direkt aus Eigenschaften von $+$ und $\cdot$ folgen

Den entsprechenden VR können wir als Grenzfall eines endlich dimensionalen VRs verstehen

Diskretisiere $[a,b]$ in Punkte $x_1, \dots, x_n$



dann ist $f(x)$ an den Punkten x_i durch einen Vektor darstellbar

$$f(x) = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

was für jedes n einen n-dim VR bildet

Dann erhalten wir im $\lim_{n \to \infty}$ einen unendlich dimensionalen VR von Funktionen $[a,b] \to \mathbb{R}$

Dieser VR besitzt ein Skalarprodukt für jedes feste n

$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$

$$\langle f,g\rangle_n = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta x_i \, f^*(x_i)\, g(x_i)$$

Im $\lim_{n\to\infty}$ wird $\Delta x_i \approx \frac{a-b}{n} \to 0$. Sofern der Grenzwert für gegebene Funktionen f,g existiert ist dann

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n-1} \Delta x_i \, f^*(x_i)\, g(x_i) = \int_a^b dx\, f^*(x)\, g(x)$$

Wenn der Grenzwert existiert ist

$$\int_a^b dx\, f^*(x) g(x) = \langle f,g\rangle$$

erneut ein Skalarprodukt auf dem ∞-dim VR

Die induzierte Norm ist dann

$$0 \le \|f\|^2 = \langle f,f\rangle = \int_a^b dx\, |f(x)|^2 < \infty$$

Die Existenz des Integrals ist z.B. für stetige Funktionen auf kompakten Intervallen $[a,b]$ immer gegeben. Wenn wir allerdings für unendliche Intervalle oder nicht stetige Funktionen das Skalarprodukt definieren wollen, müssen wir zunächst die Existenz des Integrals betrachten.

Sei f,g Funktionen mit $\int_a^b dx\, |f(x)|^2, |g(x)|^2 < \infty$

dann gilt

$$\|f+g\|^2 = \int_a^b dx\, |f(x)+g(x)|^2 \le \int_a^b dx\, |f(x)+g(x)|^2 + |f(x)-g(x)|^2$$

$$\le 2\int_a^b dx \left(|f(x)|^2 + |g(x)|^2\right) \le 2(\|f\| + \|g\|)$$

D.h. die Summe zwei Quadratintegrabler Funktionen ist wieder quadratintegrabel. Ähnlicher Weise gilt dass die Funktion λf quadratintegrabel ist

Damit bilden die auf $[a,b]$ quadratisch integrablen Funktionen einen VR mit Skalarprodukt der als $L^2([a,b])$ bezeichnet wird

$\rightarrow$ Quantenmechanik

Einfache <u>Beispiele für Funktionenräume</u> bilden z.B. die Menge der Polynome vom Grad $P(x) \leq N$

$$P_N = \{ P(x) : P(x) \text{ Polynom},\ \text{grad}(P) \leq N \}$$

wenn wir reelle Polynome betrachten bilden diese einen reellen VR mit $\dim(P_N) = N+1$

<u>Basis von P_N</u> Einfache Basis ist

$$\{ p_0(x) = 1,\ p_1(x) = x,\ \cdots\ p_n(x) = x^n \}$$

Basisvektoren $\underline{e}_i = p_i(x)$

<u>Skalarprodukt auf P_N</u>: Es existieren verschiedene Möglichkeiten ein Skalarprodukt zu definieren. Wähle z.B. $[a,b] = [-1,1]$ und

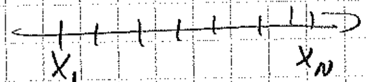
$$\langle P_k, Q_n \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} dx\, P_k(x)\, Q_n(x)$$

dann bilden Legendre Polynome ONB für P_N und wir können diese mittels Gram-Schmidt Verfahren konstruieren

Bei der Betrachtung von Funktionenräumen ist zu beachten, dass die Elemente des VRs, also die Funktionen unabhängig von ihrer Darstellung existieren, d.h.

$|f\rangle$ bezeichnet eine Funktion

Durch Diskretisierung des Wertebereichs hatten wir gesehen, dass eine mögliche Darstellung einer solchen Funktion in einer ONB möglich ist



$$\begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}$$

dabei ergeben sich $f(x_i) = \langle \chi_i | f \rangle = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta x_k \; \chi_i(x_k) \, f(x_k)$

d.h. die Basiselemente sind

$$\chi_i(x_k) = \frac{1}{\Delta x_i} \delta_{ik}$$

Wenn wir jetzt allerdings den Kontinuumslimes bilden divergiert der entsprechende Ausdruck für die charakteristische Funktion χ_i, da $\Delta x_i \to 0$ im $\lim_{N \to \infty}$

Die Aussage hinsichtlich des Funktionswerts $f(x_i)$ ist hierdurch jedoch nicht berührt, da sich dort Δx_i wegkürzt.

D.h. um eine Darstellung von kontinuierlichen Funktionen zu erhalten, und diese an bekannten Punkten auszuwerten benötigen wir eine Erweiterung unserer Begrifflichkeiten auf sog. Distributionen

II.3 Dirac δ-Distribution

Wie bereits gesehen ist der Kontinuumslimes unter dem Integral wohldefiniert, so lange die entsprechende Funktion $f(x)$ bestimmte Eigenschaften bzgl. Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit erfüllt

Dies legt nahe die gewünschten Vektoren so zu definieren dass
$$\langle x_x | f \rangle = f(x)$$

d.h. also mit der Definition des Skalarprodukts
$$\int dz \, x_x^*(z) \, f(z) = f(x)$$

damit ist $x_x^*(z)$ allerdings keine Funktion mehr sondern eine Distribution und zwar $\delta(x-z)$

__Def:__ Die Dirac δ-Distribution ist definiert so dass
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \delta(x) \, \phi(x) = \phi(0)$$
für alle erlaubten Testfunktionen ϕ

Eine mathematisch rigorose Definition ist z.B. im Rahmen der Maß- und Integrationstheorie (Ana III) möglich, durch das Punktmaß
$$\int d\mu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \delta(x)$$

Durch einfaches Nachrechnen lassen sich einige Eigenschaften der δ-Funktion herleiten

Eigenschaften von $\delta(x)$:

1) $$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi(x)\, \delta(x-x_0) \overset{\substack{y=x-x_0 \\ x=y+x_0}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \psi(y+x_0)\, \delta(y) = \psi(x_0)$$

2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi(x)\, \delta(-x) \overset{y=-x}{=} - \int_{+\infty}^{-\infty} dy\, \psi(-y)\, \delta(y) = \psi(0)$$

D.h. also: $\delta(x)$ ist „gerade"

3) $$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi(x)\, \delta\left(\frac{x}{c}\right) \underset{y=\frac{x}{|c|}}{=} |c| \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \psi(y)\, \underbrace{\delta(\mathrm{sgn}(c)\, x)}_{\overset{2)}{=}\ \delta(x)} = |c|\, \psi(0)$$

oder allgemeiner

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi(x)\, \delta\left(\frac{x-x_0}{c}\right) = |c|\, \psi(x_0)$$

Die Aussage in 3) lässt es erahnen, das Ergebnis auf beliebige Ausdrücke der Form

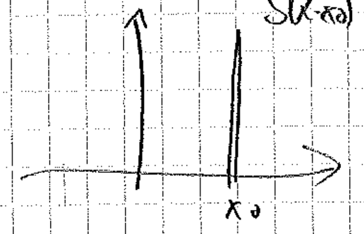
$$\delta(f(x))$$ zu erweitern

Dazu müssen wir zunächst die Nullstellen von $f(x)$ bestimmen

Sei $f(x_0)=0$ eine <u>einfache Nullstelle</u>, dann $f(x)$ linearisiert gilt

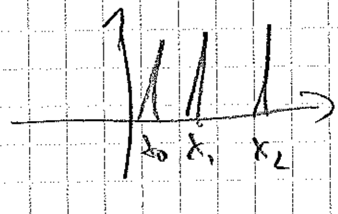
$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\substack{=0 \\ \text{einfache Nst}}} + \underbrace{f'(x_0)}_{\neq 0}\, (x-x_0) + O(x-x_0)^2$$

Da uns für die Auswertung allerdings nur das Verhalten in der Nähe der Nullstelle interessiert ist das Verhalten von $f(x)$ ausserhalb der Nullstelle irrelevant



$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \psi(x)\ \delta(f(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \psi(x)\ \delta\left(f'(x_0)(x-x_0) + O(x-x_0)^2\right) = \frac{\psi(x_0)}{|f'(x_0)|}$$

Bei mehreren einfachen Nullstellen müssen nur alle entsprechenden Beiträge berücksichtigt werden



$$4)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \psi(x)\ \delta(f(x)) = \sum_{\substack{j\ \text{Nullstellen} \\ \text{von } f(x_j)}} \frac{\psi(x_j)}{|f'(x_j)|}$$

Des weiteren gilt für die Verkettung von δ-Distributionen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy\ \psi(y) \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \delta(x-y)\,\delta(x-z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dy\ \psi(y)\ \delta(x-y)\right] \delta(x-z)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \psi(x)\ \delta(x-z) = \psi(z)$$

So dass im Sinne der Distributionen gilt

$$5)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \delta(x-y)\,\delta(x-z) = \delta(y-z)$$