Wiederholung: Begriffe der lin. Algebra

- Vektorraum $(V, \oplus, \odot)$ über Körper K
  - $\oplus$ Vektoraddition
  - $\odot$ skalare Multiplikation

- Basis $B = \{\underline{e_i}\}$

  $\forall\ \underline{v} \in V\ \exists$ eindeutige Darstellung $\underline{v} = v_i \underline{e_i}$

- Skalarprodukt $V \times V \to K$

  $\langle u, v \rangle$ Sesquilinearform, hermitesch, positiv definit

- Orthonormalbasis (ONB)

$$\langle \underline{e_r}, \underline{e_s} \rangle = \delta_{rs}$$

→ besonders praktisch bei Darstellung von Operatoren

Betrachte z.B. $\underline{v}, \underline{w} \in V$ mit Skalarprodukt und $\{e_i\}$ ONB von V, dann gilt

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle \underset{\text{Basis}}{=} \langle v_i e_i, w_j e_j \rangle \underset{\text{Skalarprodukt}}{=} v_i^* w_j \underbrace{\langle \underline{e_i}, \underline{e_j} \rangle}_{= \delta_{ij}} = v_i^* w_i$$

Insbesondere gilt für den Spezialfall $\underline{v} = \underline{e_k}$ $\quad v_i = \delta_{ik}$

$$\langle e_k, \underline{w} \rangle = \delta_{jk} w_j = w_k$$

D.h. wir erhalten die Komponenten des Vektors im ONB durch Projektion mit Hilfe des Skalarprodukts

Durch Basis lassen sich ebenfalls einfache Darstellungen linearer Abbildungen finden

Betrachte $L: V \to W$ mit $\{e_k\}$ Basis von V
$\{e'_i\}$ Basis von W

dann ist für $v \in V$

$$L(v) = L(v_k e_k) = v_k L(\underline{e_k})$$

da $L(e_k) \in W$ lässt es sich als Linearkombination der Basisvektoren von W darstellen, d.h.

$$L(\underline{e_k}) = L_{ik}\, \underline{e}'_i$$

also ist

$$L(\underline{v}) = v_k L(\underline{e_k}) = \underline{e}'_i \underbrace{L_{ik}}_{\text{Matrixdarstellung der linearen Abbildung}} v_k$$

Wenn $\{e'_i\}$ in W eine ONB erhalten wir durch $v_k = \delta_{kj}$ (i.e. Abbildung des Basisvektors) und mit Skalarprodukt

$$\langle e'_i, L(e_k)\rangle_W = L_{ik}$$

die Elemente der Matrix

Durch Anwendung des Gram-Schmidt Verfahrens lässt sich aus einer beliebigen Basis $\{f_i\}$ von V eine ONB des VRs konstruieren

<u>Gram-Schmidt:</u> Konstruktion von ONB durch rekursives Vorgehen

<u>Start</u> Basisvektor $\boxed{e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}}$ $\Rightarrow \langle e_1, e_1\rangle = \frac{\langle f_1, f_1\rangle}{\|f_1\|^2} = 1$ ✓

Die Idee ist nun zunächst linear unabhängige Hilfsvektoren zu konstruieren (ortho) und diese anschließend zu normieren (normal).

Zur Konstruktion des nächsten ONB Elements betrachten wir f_2 was im Allgemeinen zwar linear unabhängig von e_1 ist (da $\{f_i\}$ Basis) aber nicht notwendigerweise orthogonal.

Damit wir einen Vektor orthogonal zu e_1 haben ziehen wir die Projektion auf e_1 einfach ab

Hilfsvektor $\tilde{e}_2 = f_2 - \langle e_1, f_2\rangle e_1$

$$\Rightarrow \langle e_1, \tilde{e}_2\rangle = \langle e_1, f_2\rangle - \langle e_1, f_2\rangle\langle e_1, e_1\rangle = 0$$ ✓

da $\tilde{e}_2 \neq 0$ wegen linearer Unabhängigkeit von $\{f_i\}$ können wir den Vektor normieren

Basisvektor $e_2 = \frac{\tilde{e}_2}{\|\tilde{e}_2\|}$ $\langle e_1, e_2\rangle = 0$ ✓ $\langle e_2, e_2\rangle = 1$ ✓

Die weiteren Elemente erhalten wir analog durch rekursives Vorgehen

Rechnung: $\boxed{\text{Hilfsvektor } \underline{\tilde{e}_k} = \underline{f_k} - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \underline{e_i}, \underline{f_k} \rangle e_i}$

Bemerke dabei für $l < k$

$$\langle e_l, \tilde{e}_k \rangle = \langle e_l, f_k \rangle - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_i, f_k \rangle \langle e_l, e_i \rangle$$

da für $i, l = 1, \ldots, k-1$ die Vektoren e_l, e_i orthonormal sind gilt

$$\langle e_l, e_i \rangle = \delta_{il}$$

d.h.

$$\langle e_l, \tilde{e}_k \rangle = \langle e_l, f_k \rangle - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_i, f_k \rangle \delta_{il} = 0$$

Da $\{f_i\}$ somit Basis sind, dessen f_k linear unabhängig und damit $\tilde{e}_k \neq 0$ also $\|\tilde{e}_k\| \neq 0$

$\boxed{\text{Basisvektor } e_k = \frac{\tilde{e}_k}{\|\tilde{e}_k\|}}$

Dualer Vektorraum: Zu jedem

Bezeichnet den Vektorraum der linearen Abbildungen in den Körper $V^* = \{L : V \to K \quad v \mapsto L(v) \text{ mit } L(v) \text{ linear}\}$

Der Dualraum existiert für alle VR, insbesondere gilt $\dim(V) = \dim(V^*)$ für endlich dimensionale VR

Wenn V ein Hilbertraum ist (also Skalarprodukt besitzt und vollständig ist) gilt entsprechend

Satz von Riesz-Fréchet: $V \simeq V^*$ isomorph

$$\forall \underline{v} \in V \quad \exists \underline{v}^* \in V^* \text{ eindeutig sodass}$$

$$v^* : V \to K \quad u \mapsto v^*(u) := \langle v | u \rangle$$

d.h. die Elemente des Dualraums lassen sich durch das Skalarprodukt darstellen

Vollständigkeitsrelation & Dirac notation

Wenn V eine ONB $\{e_j\}$ besitzt gilt wie bereits gezeigt

$$\underline{v} \in V \qquad \underline{v} = \underline{e}_j \langle \underline{e}_j | \underline{v} \rangle \qquad \text{(Summenkonvention)}$$

Da V und V^* isomorph sind liegt es nahe Elemente zu identifizieren

für $\underline{v} \in V$ schreibe $\underline{v} = |\underline{v}\rangle \in V$ „Ket"-Vektor

für $\underline{v}^* \in V^*$ schreibe $\underline{v}^* = \langle \underline{v}| \in V^*$ „Bra"-Vektor

D.h. Skalarprodukte auf V sind gegeben durch

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle \underline{v} | \underline{w} \rangle \quad \text{i.e. Produkte der Form „Bra-Ket"}$$

Die Darstellung des Vektors $\underline{v}$ in der Basis ist damit

$$|\underline{v}\rangle = |e_j\rangle \langle e_j | \underline{v} \rangle \qquad \forall\ |\underline{v}\rangle \in V$$

da dies für alle $\underline{v} \in V$ gilt wissen wir also

$$\boxed{|e_j\rangle\langle e_j| = \sum_{j=1}^{\dim(V)} |e_j\rangle\langle e_j| = \mathbb{1}}$$

Damit lassen sich z.B. lineare Abb. einfach darstellen

$L: V \to V$

$$L(\underline{v}) = L|\underline{v}\rangle = \mathbb{1} L \mathbb{1} |v\rangle = |e_l\rangle \underbrace{\langle e_l | L | e_k\rangle}_{\substack{L_{lk} \\ \text{Matrixelement}}} \underbrace{\langle e_k | v\rangle}_{\substack{v_k \\ \text{Vektorkomponente}}}$$