Mathematische Methoden der Physik („MMP")

<u>Kontakt</u> Sören Schlichting
sschlichting@physik.uni-bielefeld.de
E6-137

<u>Webseite:</u> www.kaiden.de/MMP_WS1920.html

<u>Vorlesungen:</u> Di & Do 12^{00} - 14^{00}

<u>Beginn:</u> 12^{15} <u>Ende:</u> $\sim 13^{50}$

Sofern noch nicht geschehen bitte im EKVV eintragen für
MMP & Übungen MMP

Bislang 60 Teilnehmer Vorlesung
30 " Übungen

Übungen

Mögliche Termine

A) Di 14-16 Uhr US-133
B) Di 16-18 Uhr D6-135
C) Mi 16-18 Uhr D6-135

Es werden lediglich zwei Termine stattfinden

AB), AC) oder BC)

Tutoren: Peter Zroschó, Stefan Klaus Brünning

Einteilung der Übungsgruppen durch Eintragen in Liste am Ende der Vorlesung

Übungsablauf

Erster Termin Di 15 Oktober

Übungszettel online & in Übung ausgeteilt

Die Übungen bestehen aus Präsenzübungen und Hausübungen

Präsenzübungen: Bearbeitung während der Übungszeit unter Anleitung des Tutors
Gruppenarbeit ausdrücklich erwünscht

Hausübungen: Individuell abzugeben zum nächsten Übungstermin
Korrektur & Rückgabe bei der nächsten Übungsstunde nach Abgabe

Das Modul „MMP" enthält 10 Leistungspunkte

<u>Studienleistung (3LP)</u>

- Mitarbeit in Übungsgruppen
- sinnvolle Bearbeitung von 50% der Hausübungen

<u>Prüfungsleistung (7LP)</u>

Klausur	Di 18. Feb	12^{00} - 14^{00}	H14
	Di 17. März	12^{00} - 14^{00}	H14

kann als benotete oder unbenotete Prüfungsleistung gewertet werden

Die Klausur umfasst Inhalte der Vorlesung und Übungen

Nähere Informationen zu gegebenem Zeitpunkt

Empfohlene Vorkenntnisse.

- Rechenmethoden
- Analysis
- Lineare Algebra für Physiker

oder

- Mathematik für Naturwissenschaftler I/II

Die Lehrinhalte von MMP dienen der
Vorbereitung / Ergänzung der Theor. Physik
Vorlesung (insbesondere QM)
→ Vermittlung math. Konzepte

und der Vorbereitung auf Forschungsarbeiten / Wahlvorlesungen
B.Sc. / M.Sc. in theor. Physik

Es ist keine Mathematik Vorlesung im
strengen Sinne (a la Analysis), d.h.
ich werde versuchen mathematische Konzepte
mit genügender Sorgfalt zu vermitteln
aber auch den Bezug zur Physik
im Auge zu behalten und relevante
Rechentechniken zu vermitteln

Inhalt:

1) Komplexe Analysis (Funktionentheorie)

2) Funktionenräume & Distributionen
   → Integraltransformationen

3) Operatoren & Spektraltheorie

Literatur:

Die Vorlesung basiert nicht direkt auf einem Lehrbuch, allerdings finden Sie relevante Literatur im Semesterapparat „MMP"

Handschriftliche Notizen werden online gestellt, allerdings wird ausdrücklich empfohlen eigene Mitschriften anzufertigen

Das Wichtigste zum Schluss,

- Engagement, Fragen, Mitdenken ist ausdrücklich erwünscht

I Funktionentheorie (complex calculus)

Generell werden physikalische Sachverhalte durch reelle Variablen ausgedrückt

Da physikalische Zusammenhänge i.A. durch „angenehme" Funktionen ausgedrückt werden können, lassen sich diese Zusammenhänge in vielen Fällen auf komplexe Weise erweitern

Komplexe Analysis als Werkzeug der theor. Physik

Bsp: DGLs reeller Funktionen mittels komplexer Variablen lösen

Berechnung reeller Integrale mittels komplexer Analysis

...

Komplexe Analysis bietet erstaunliche Erkenntnisse über Eigenschaften komplexer Funktionen

Differenzierbarkeit auf $\mathbb{C}$ ist viel stärkere Anforderung als auf $\mathbb{R}$

Bsp: $f(z)$ differenzierbar $\Leftrightarrow$ $f(z)$ beliebig oft differenzierbar $\Leftrightarrow$ $f(z)$ lokal als Potenzreihe darstellbar

unter geeigneten Bedingungen an den Definitionsbereich der Funktion

Erster Teil der Vorlesung beschäftigt sich mit der Herleitung solcher Sachverhalte (mathematisch geprägt) und anschließend der Erschließung von Rechenmethoden basierend auf diesen Prinzipien

Damit wir diese Sachverhalte verstehen können betrachten wir zunächst Struktur der komplexen Zahlen

I.1) Komplexe Zahlen

<u>Def:</u> Die Menge der <u>komplexen Zahlen $\mathbb{C}$</u> ist definiert durch

1). $\mathbb{C}$ ist ein Körper $(\mathbb{C}, +, \cdot)$
2) $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$
3) $\exists\, i \in \mathbb{C} : \; i^2 = i \cdot i = -1$
4) Darstellung als geordnetes Paar reeller Zahlen
   $\forall z \in \mathbb{C} \;\; \exists\, x, y \in \mathbb{R} : \; z = x + iy$
   oder in Koordinatendarstellung $z = (x, y)$

Wobei $x = \mathrm{Re}(z)$ <u>Realteil</u>
$y = \mathrm{Im}(z)$ <u>Imaginärteil</u>

D.h. insbesondere ist $\mathbb{C}$ gegenüber $\mathbb{R}^2$ mit zusätzlichen Strukturen ausgestattet die sich durch 1) und 3) ergeben

Def. Ein Körper ist eine Menge M mit 2 Verknüpfungen (Abbildungen der Menge auf sich selbst) die als + Addition und · Multiplikation bezeichnet werden und die folgenden Eigenschaften besitzen

$\forall a,b,c \in M$

1) Kommutativität $a+b = b+a$, $a \cdot b = b \cdot a$

2) Assoziativität $a+(b+c) = (a+b)+c$
$a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$

3) Distributivität $a(b+c) = ab + ac$

4) Neutrale Elemente

$\exists\ 0, 1 \in M$ (neutrale Elemente von $+, \cdot$)
so dass $a+0=a$ $a\cdot 1 = a$

5) Existenz der inversen Elemente

$\forall a \in M\ \exists\ (-a)$ $a+(-a)=0$

$\forall a \in M\setminus\{0\}\ \exists\ a^{-1}$ $a\cdot(a^{-1}) = 1$

Selbstverständlich erfüllen die „normale" Addition und Multiplikation der reellen Zahlen diese Eigenschaften

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper

Definition der komplexen Zahlen vervollständigt durch Definition von Addition und Multiplikation

$$z_1 = x_1 + iy_1 \qquad z_2 = x_2 + iy_2$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$ analog zu Addition auf $\mathbb{R}^2$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Damit folgen die Körpereigenschaften 1)–8) direkt aus denen der reellen Zahlen, wobei die neutralen Elemente durch

$0 = 0 + 0i$

$1 = 1 + 0i$

gegeben sind

Die Existenz des inversen Elements für Multiplikation lässt sich ähnlich leicht herleiten

Dazu führen wir zunächst

<u>komplexe Konjugation</u> $*$ oder $-$

$\mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad z \to z^* \quad$ oder $\quad z \to \bar{z}$

$$z = x + iy \qquad z^* = x - iy$$

insbesondere ist

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$$

sodass

$$z\bar{z} \in \mathbb{R} \qquad z\bar{z} \geq 0$$

Definition der Betragsfunktion 1.1 $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$$

was der „Länge des Vektors" entspricht

Damit ist für $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ das inverse Element der Multiplikation gegeben durch

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy}\,\frac{x-iy}{x-iy} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z}$$

Wichtigste praktische Bedeutung ist dass sich mit komplexen Zahlen genauso rechnen lässt wie mit reellen Zahlen

$$z_1 z_2 = (x_1+iy_1)(x_2+iy_2) = x_1x_2 + i(y_1x_2 + x_1y_2) + \underbrace{i^2}_{=-1} y_1y_2$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_1x_2 + x_1y_2)$$

$$z_1/z_2 = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)} = \frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

wobei $i^2=-1$ || $\frac{1}{i} = \frac{i^*}{i\,i^*} = \frac{-i}{1} = -i$ || $(-i)i = +1$ zu beachten sind

Durch einfaches Berechnen lässt sich weiterhin zeigen

$$(z_1^*)^* = z_1$$

$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^* \qquad (z_1+z_2)^* = z_1^* + z_2^*$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

und es lassen sich $\mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(z)$ darstellen als

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$$

Die Tatsache dass sich $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ ausdrücken lässt legt eine Identifikation von $\mathbb{C}$ mit dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$ nahe

Das „Besondere" an $\mathbb{C}$ ist allerdings dass es zusätzlich mit der Multiplikationseigenschaft ausgestattet ist die es so auf $\mathbb{R}^2$ nicht gibt

$$\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C} \qquad z_1, z_2 \to z_1 z_2$$

während es auf $\mathbb{R}^2$ lediglich folgende Operationen gibt

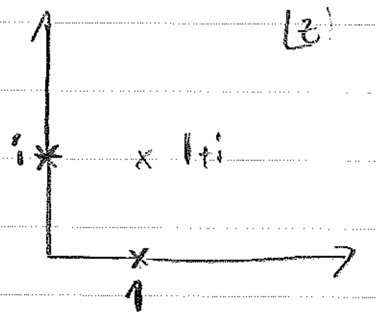
<u>Skalare Multiplikation</u>

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \qquad \lambda, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

<u>Skalarprodukt:</u>

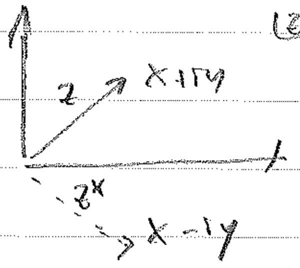
$$\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \to x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Nichtsdestotrotz ist die Isomorphie von $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ für die Darstellung der komplexen Zahlen und Operationen hilfreich



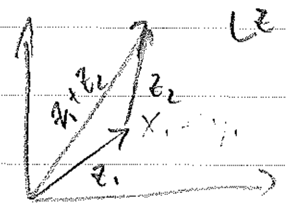
Dementsprechend ergeben sich folgende geometrische Darstellungen für die elementaren Rechenoperationen

Komplexe Konjugation



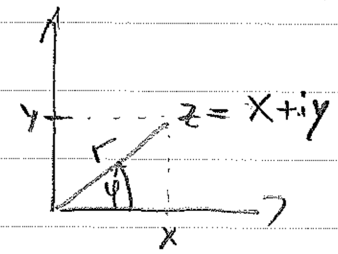
Spiegelung an der reellen (x-) Achse

Addition & Subtraktion



Standard Vektoraddition

Damit wird der Grundstein der komplexen Multiplikation verstehen können. Bietet sich eine Darstellung in Polarkoordinaten an



Wir erhalten für $z \neq 0$:

$$|z| = r$$

und $x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$$\Rightarrow z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin(\varphi))$$

Der Winkel $\varphi = \arg(z)$ wird als Argument von z bezeichnet

Da φ und $\varphi + 2\pi$ den gleichen Punkt z bezeichnen ist dieser im Allgemeinen <u>nicht eindeutig</u>

Die Eindeutigkeit kann durch Festlegung auf ein beliebiges Intervall hergestellt werden, am häufigsten verwendet man

$$\boxed{\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]}$$

d.h. $-\pi < \varphi \leq \pi$ und die Abbildung zwischen kartesischen & Polarkoordinaten ist bijektiv

Es gelten für arg folgende Rechenregeln

$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \qquad \text{(Spiegelung)}$$

$$\arg(z^{-1}) = \arg\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right) = \arg(\bar{z}) = -\arg(z)$$