Wiederholung: Kramers-Kronig relations

$f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ ohne Singularitäten für $\mathrm{Im}(z) \geq 0$
und mit $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$ für $\mathrm{Im}(z) \geq 0$

Beziehung zwischen Real- und Imaginärteilen

$$\boxed{\begin{aligned} u(x_0,0) &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v(x,0)}{x-x_0}\, dx \\ v(x_0,0) &= -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x,0)}{x-x_0}\, dx \end{aligned}}$$

Sattelpunkte

Beweis dass $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ holomorph keine lokalen Maxima/Minima von $u, v$ besitzt

→ direkte Konsequenz aus Mittelwerteigenschaft

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \; f(z_0 + \varepsilon e^{i\varphi})$$

# Sattelpunktnäherung

<u>Idee:</u> Verwende Kenntnis von Sattelpunkten in der komplexen Ebene zur approximativen Bestimmung von Integralen

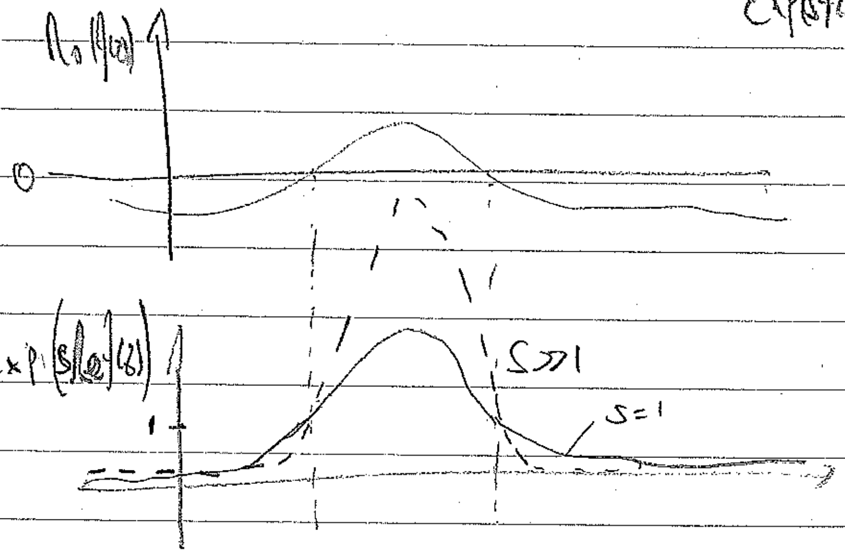
Betrachte $f, g$ holomorph

$$I(s) = \int_{\mathcal{C}} dz\; g(z)\, e^{s f(z)} \qquad \text{mit } s \in \mathbb{R}$$

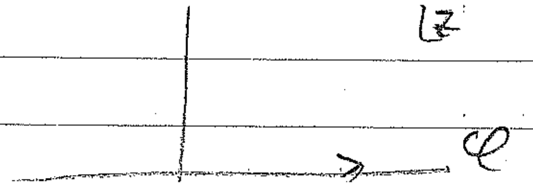
Im $\lim_{s\to\infty}$ sind Beiträge dominiert durch Punkte $z$ in der Nähe der Maxima von $\mathrm{Re}(f(z))$ entlang der Integrationskontur

Betrachte zunächst das Verhalten von $\mathrm{Re}(f(z))$

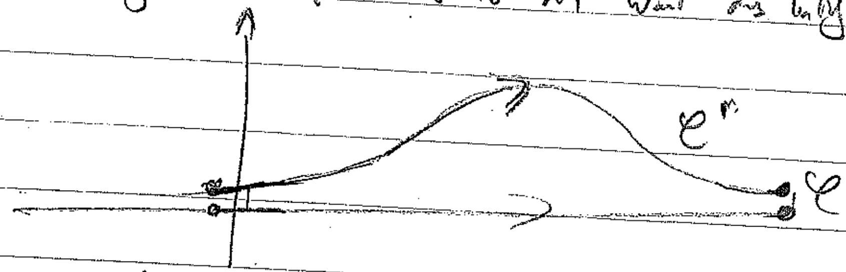
$$|\exp(s f(z))| = \exp(s\,\mathrm{Re} f(z)) \underbrace{|\exp(i s \,\mathrm{Im} f(z))|}_{|\cdot| = 1}$$



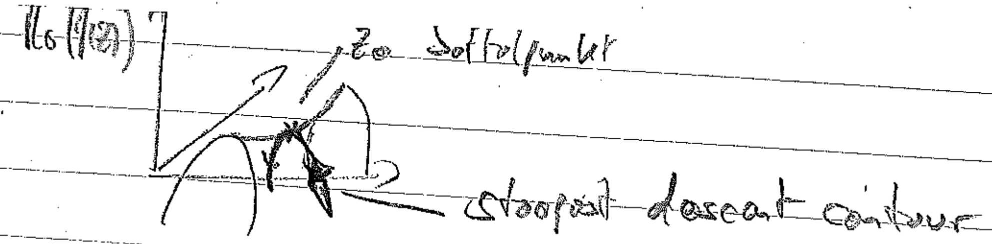

Damit ist für $s \gg 1$ der Beitrag in der Nähe des Maximums von $f(z(t))$ mit $t \in [a,b]$ entlang der Integrationskontur dominant



Da $f, g$ holomorph können wir den Integrationsweg allgemein verformen ohne den Wert des Integrals zu ändern




Um die Beiträge zum Integral möglichst schnell zu lokalisieren können wir $\mathcal{C}'$ so dass es durch Sattelpunkt verläuft




Wähle $\mathcal{C}'$ als steepest descent contour

$$I(s) = \int_{\mathcal{C}'} dz\, g(z)\, e^{s f(z)} = \int_a^b dt\, z'(t)\, g(z(t))\, e^{s f(z(t))}$$

wobei $z(t)$ eine Parametrisierung der steepest descent contour in der Nähe des Sattelpunkts zu darstellt

Da $f(z)$ holomorph ist das Verhalten in der Nähe von $z_0$ durch Taylor

$$f(z) = f(z_0) + (z-z_0)\underbrace{f'(z_0)}_{\text{Sattelpunkt } =0} + \frac{1}{2}(z-z_0)^2 f''(z_0) + O(z-z_0)^3$$

Dann erhalten wir den steilsten Abstieg wenn

$$\frac{1}{2}(z-z_0)^2 f''(z_0) \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}(z-z_0)^2 f''(z_0) < 0$$

$\Rightarrow$ d.h. die Richtung von $(z-z_0)$ sollte so gewählt werden dass $f(z)$ abfällt

Dementsprechend können wir die steepest descent Contour parametrisieren als

$$\frac{1}{2}(z(t)-z_0)^2 f''(z_0) = -\frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad (z(t)-z_0)^2 = -\frac{t^2}{f''(z_0)} = \frac{-t^2}{|f''(z_0)|\, e^{i\arg(f''(z_0))}}$$

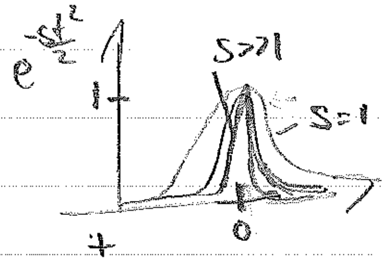
$$\rightarrow \quad z(t) = \frac{it}{\sqrt{|f''(z_0)|}}\, e^{-\frac{i}{2}\arg(f''(z_0))}$$

$$\boxed{z(t) = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{|f''(z_0)|}}\, t} \qquad e^{i\alpha} = i\, e^{-\frac{i}{2}\arg(f''(z_0))}$$

Betrachten wir nun den Integranden

$$\exp(s f(z(t))) \simeq \exp\left(s f(z_0) - \frac{s t^2}{2}\right) = \underbrace{e^{s f(z_0)}}_{\text{Const}} e^{-\frac{s t^2}{2}}$$

dann ist für $s \to \infty$ das Integral also $t$ dominiert für nur kleine Werte von $t$




Dementsprechend können wir $g(z(t))$ nähern als

$$g(z(t)) = g\left(z_0 + t\frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{|f''(z_0)|}}\right) \simeq g(z_0) + O(t)$$

da eh nur kleine $t$ eine Rolle spielen

Damit ist

$$I(s) \simeq \int_a^b dt\, \underbrace{\frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{|f''(z_0)|}}}_{= z'(t)} \overbrace{g(z_0)\, e^{s f(z_0)}}^{\simeq \text{Const}} e^{-\frac{s t^2}{2}}$$

$$\int_a^b dt\, e^{-\frac{st^2}{2}} \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{-\frac{st^2}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi}{s}}$$

So dass

$$\boxed{I(s) = \sqrt{\frac{2\pi}{|s f''(z_0)|}}\, g(z_0)\, e^{s f(z_0)} e^{i\alpha}}$$

unabhängig von den Details der Funktionen $f, g$

Bemerkungen: Die Methode der Sattelpunktsnäherung lässt sich im Rahmen der Picard-Lefschetz Theorie erweitern. Insbesondere für Funktionen mit mehreren Sätteln wird hierdurch klar welche Sattelpunkte eine Rolle spielen, und wie der Integrationskontour zu verformen ist ohne den Wert des Integrals zu ändern

Beispiel: Stirling Formel

Betrachte

$$s! = \Gamma(s+1) = \int_0^\infty t^s e^{-t}\, dt = \int_0^\infty dt\, e^{-t+s\log(t)}$$

für große Werte von $s$. Durch Variablenänderung erhalten wir

$$t = sw \qquad dt = s\,dw$$

$$\Gamma(s+1) = s \int_0^\infty dw\; e^{-sw+s(\log(sw))}$$

$$= s^{s+1} \int_0^\infty dw\; e^{s(\log(w)-w)}$$

Das Integral ist nun von geeigneter Form für die Sattelpunktsnäherung mit

$$f(w) = \log(w) - w \quad \text{und} \quad g(w) = 1$$

Wir bestimmen zunächst die Ableitung

$$f'(w) = \frac{1}{w} - 1$$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt bei $\boxed{w_0 = 1}$

$$f''(w) = -\frac{1}{w^2} \Rightarrow f''(w_0) = -1$$

Dann ist $\arg(f''(w_0)) = \pi$

und damit

$$e^{i\alpha} = i\, e^{-\frac{i}{2}\pi} = 1$$

und wir erhalten mit $g(w_0) = 1$ und $f(w_0) = -1$

$$\Gamma(s+1) = s^{s+1} \sqrt{\frac{2\pi}{s+1}} \cdot 1 \, e^{s(-1)} \cdot 1$$

Stirling Formel $\boxed{\Gamma(s+1) = \sqrt{2\pi s}\, s^s e^{-s}}$