Wiederholung:

isolierte Singularitäten von komplexen Funktionen f
$\rightarrow$ isolierte Punkte an welchen f (nicht holomorph ist)

Klassifizierung
hebbar z.B. $\frac{z}{z}$
Pol n-ter Ordnung z.B. $\frac{1}{z^n}$
wesentlich z.B. $\exp(-\frac{1}{z})$
mittels Koeffizienten der Laurentreihe

Konturintegrale von komplexen Funktionen mit isolierten Singularitäten

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-b)^n \quad \text{konvergent für} \quad r<|z-b|<R$$

$$\Rightarrow \oint_{\partial K_\rho(b)} f(z)\,dz = 2\pi i \boxed{a_{-1}} = 2\pi i \operatorname{Res}_b(f)$$

Residuensatz: Betrachte U einfach zshg und f holomorph bis auf isolierte Singularitäten in $\{b_1, \dots, b_k\}$

$$\oint_\gamma dz f(z) = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \underbrace{\nu_\gamma(b_j)}_{\text{Umlaufzahl}} \underbrace{\operatorname{res}_{b_j}(f)}_{\text{Residuum von } f \text{ in } b_j}$$

Hauptwerkzeug über komplexe Konturintegrale
Spezialfall: $f(z)$ holomorph ohne Singularität

$$\oint dz f(z) = 0 \quad \text{— Cauchy's Integralsatz}$$

Werden im weiteren Abschnitt zur Funktionentheorie
das Residuensatzes betrachten

Nicht alle Anwendungen im Vorlesung dargestellt
siehe z.B. Kapitel 7 Ablowitz Fokas für
weitere Anwendungen & Beispiele

Bisher Bemerkungen zur Bestimmung der
Residuen der Laurentreihenentwicklung, d.h.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^{(j)} (z-b_j)^n$$

dann ist $\quad \operatorname{res}_{b_j}(f) = a_{-1}^{(j)}$

Das erscheint mühsam insbesondere
wenn die Kontur mehrere Singularitäten
einschließt, da wir an jeder Singularität
die Laurentreihe bestimmen müssen

[illegible]

Die Berechnung von Residuen mittels Laurentreihenentwicklung ist häufig kompliziert, da wir nicht die gesamte Reihe sondern nur einen einzigen Koeffizienten benötigen.

Daher bieten sich einfachere Verfahren an, die in vielen Fällen einen einfacheren Weg liefern.

Wenn wir rationale Funktionen $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ betrachten bietet es sich an eine Partialbruchzerlegung durchzuführen

<u>Satz:</u> Partialbruchzerlegung

Sei f eine rationale Funktion mit l Polen $b_1, \dots, b_l$ der Ordnung $n_1, \dots, n_l$, dann gibt es $l+1$ eindeutig bestimmte Polynome $p_0, \dots, p_l$ mit Grad $p_j \leq n_j - 1$ für $j = 1, \dots, l$ so dass

$$f(z) = p_0(z) + \frac{p_1(z-b_1)}{(z-b_1)^{n_1}} + \dots + \frac{p_l(z-b_l)}{(z-b_l)^{n_l}}$$

$\forall z \neq b_1, \dots, b_l$

Beweis: Betrachten wir die Laurentreihenentwicklung um b_j, so gilt für den Hauptteil

$$h_j(z) = \sum_{k=1}^{n_j} a_k^{(j)} \frac{1}{(z-b_j)^k}$$

d.h. da der Pol n_j-ter Ordnung ist endet die Summe. Damit ist aber

$$h_j(z) = \frac{1}{(z-b_j)^{n_j}} \underbrace{\sum_{k=1}^{n_j} a_k^{(j)} (z-b_j)^{n_j-k}}_{P_j(z-b_j) \text{ Polynom vom Grad } \le n_j-1}$$

Wenn wir nun die Hauptteile von allen Laurentreihen von f abziehen erhalten wir

$$f-(h_1+\dots+h_\ell)$$

was als Differenz von rationalen Funktionen wieder eine rationale Funktion ergibt.

Da $f-(h_1+\dots+h_\ell)$ allerdings keine Singularitäten, die nicht hebbar sind, aufweist (diese sind bereits durch das Abziehen der Hauptteile der Laurentreihen abgezogen worden) muss es ein Polynom sein, nämlich

$$p_0 = f-(h_1+\dots+h_\ell)$$

und wir erhalten die gewünschte Darstellung

$$\Rightarrow f = p_0 + (h_1+\dots+h_\ell)$$

Sei $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ dann können wir durch Multiplikation mit $Q(z)$ den Grad von p_0 bestimmen

$$Q(z) f(z) = \underbrace{P(z)}_{\text{Polynom vom Grad}(P)} = Q(z)\, p_0(z) + \underbrace{Q(z)\,(h_1 + \dots + h_e)}_{\text{Polynome vom Grad}}$$

$$\text{Grad}(Q h_j) < \text{Grad}(Q)$$

Damit die Ausdrücke übereinstimmen muss also

$$\text{Grad}(Q\, p_0) \leq \text{Grad}(P)$$

$$\Rightarrow \quad \text{Grad}(p_0) \leq \text{Grad}(P) - \text{Grad}(Q)$$

oder $p_0(z)$ verschwinden

Beispiel: Betrachte erneut $f(z) = \frac{1}{z(z-(1+i))}$

also $P(z) = 1 \quad Q(z) = z(z-(1+i))$

Da $Q(z)$ zwei einfache Nullstellen besitzt und $\text{Grad}(P) < \text{Grad}(Q)$ gilt $p_0(z) = 0$.

Die Polynome $p_1(z)$ und $p_2(z)$ sind vom Grad $n_j - 1 = 0$ (einfacher Pol) also muss gelten

$$f(z) = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-(1+i)}$$

$$z(z-(1+i)) f(z) = 1 = a(z-(1+i)) + bz$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir wie erwartet

$$b = \frac{1}{1+i} \qquad a = \frac{-1}{1+i}$$

was direkt den Residuen entspricht

Eine verallgemeinerte Methode zur Residuenbestimmung ergibt sich für Funktionen

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \quad \text{mit} \quad g(z), h(z) \text{ holomorph}$$

Dabei sind die Singularitäten von $f(z)$ durch Nullstellen von $h(z)$ gegeben

Damit wir das Residuum bestimmen können müssen wir unterscheiden von welcher Ordnung die Nullstellen von h ist

i) $h(z)$ hat bei z_0 eine einfache Nullstelle

$$h(z) = \underbrace{h(z_0)}_{=0} + (z-z_0)\, h'(z_0) + O(z-z_0)^2$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0) + O(z-z_0)}{(z-z_0)\, h'(z_0) + O(z-z_0)^2}$$

$$= \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \frac{1}{z-z_0} + O(1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}}$$

Wenn $g(z_0)$ ebenfalls $=0$ ist ist die Singularität hebbar mit $f(z_0) = \frac{g'(z_0)}{h'(z_0)}$

Der Fall (i) ist der meist verbreitete Fall

(ii) $f(z)$ hat einen Pol von höchstens k-ter Ordnung

d.h. $(z-z_0)^k f(z)$ hat hebbare Singularität

Dann ist $f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \dots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \dots$

Dann können wir den Koeffizienten a_{-1} herausgezogen werden mit

$$(z-z_0)^k f(z) = a_{-k} + \dots + a_{-2}(z-z_0)^{k-2} + a_{-1}(z-z_0)^{k-1}$$

betrachten, Dies ist eine Taylorreihe und wir finden den Koeffizienten a_{-1} als $(k-1)$-sten Taylorkoeffizienten

$$a_{-1} = \mathrm{Res}_{z_0}(f) = a_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \Big((z-z_0)^k f(z) \Big)_{z=z_0}$$