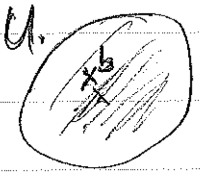
# Wiederholung: I.5 Potenz- und Laurentreihen

Darstellung holomorpher Funktionen durch Potenz- und Laurentreihen abhängig vom Gebiet auf welchem $f(z)$ holomorph ist

$U$



Darstellung der Funktion als Potenzreihe möglich

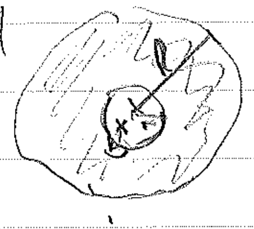
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n \quad \forall z \in K_R(b)$$

absolute Konvergenz innerhalb des Konvergenzradius $R$ um beliebigen Punkt $b \in U$

Darstellung der Koeffizienten $a_n$ durch Cauchy's Integralformel

$$a_n \underset{\text{Taylorentwicklung}}{=} \frac{f^{(n)}(b)}{n!} \underset{\text{Cauchy Formel}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_r(b)} \frac{f(z)}{(z-b)^{n+1}}\, dz$$

$U$



Darstellung der Funktion als Laurentreihe möglich

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n}_{\text{Nebenteil}} + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-b)^n}_{\text{Hauptteil}}$$

absolute Konvergenz für $r < |z-b| < R$

Kreisring

Darstellung der Koeffizienten $a_n$ durch Verallgemeinerung von Cauchy's Integralformel

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_\rho(b)} \frac{f(z)}{(z-b)^{n+1}}\, dz \qquad r<\rho<R$$

Bei praktischer Bestimmung bietet sich allerdings oftmals an bekannte Darstellungen von Reihen zu verwenden

Durch Laurentreihen lassen sich Funktionen mit isolierten Singularitäten darstellen

Klassifizierung in: hebbar, Pole $n$-ter Ordnung, wesentliche Singularität

basierend auf Koeffizienten der Laurentreihe

$a_{-n} = 0 \quad \forall\, n < N$

$N = 0$ hebbar, $N \neq 0$ Pol $n$-ter Ordnung, $N = \infty$ wesentlich

Die einfachste Methode zur Bestimmung der Ordnung ist der Grenzwert

Sei $f : K_\varrho(b) \setminus \{b\}$ holomorph

dann ist $f$ als absolut konvergente Laurentreihe darstellbar

Betrachten wir den Grenzwert

$$\lim_{z \to b} (z-b)^k f(z) = \lim_{z \to b} (z-b)^k \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-b)^n$$

$$= \lim_{z \to b} (z-b)^k \sum_{n=-k+1}^{\infty} a_n (z-b)^n \quad \to 0$$

$$+ \lim_{z \to b} (z-b)^k \, a_{-k} (z-b)^{-k} \quad \to a_{-k}$$

$$+ \lim_{z \to b} (z-b)^k \sum_{n=-\infty}^{-(k+1)} a_n (z-b)^n \quad \to \text{divergent}$$

außer wenn $a_n = 0 \ \forall\, n < k$

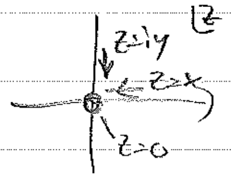
Dementsprechend liegt ein Pol N-ter Ordnung genau dann vor wenn

$$\lim_{z\to b} (z-b)^k f(z) = \begin{cases} 0 & \forall\ k>N \\ a_{-k}\neq 0 & k=N \end{cases}$$

Damit erhalten wir außerdem eine weitere explizite Methode um die Koeffizienten der Laurentreihe zu bestimmen in dem wir den Grenzwert bilden

Bei einer wesentlichen Singularität existiert der Grenzwert $\lim_{z\to b} (z-b)^k f(z)$ nicht

Bsp.: $f(z) = \exp(-\frac{1}{z^2})$




$$\lim_{x\to 0} f(z=x) = \lim_{x\to 0} \exp(-\tfrac{1}{x^2}) = 0$$

$$\lim_{y\to 0} f(z=iy) = \lim_{y\to 0} \exp(+\tfrac{1}{y^2}) \to \infty$$

Diese Aussage lässt sich durch Betrachtung weiterer Richtungen verallgemeinern.

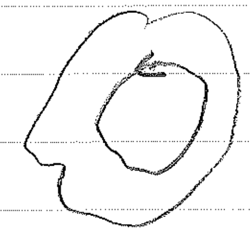
Großer Satz von Picard: Sei $f(z): K_R(b)\setminus\{b\}$ holomorph mit wesentlicher Singularität in $b$, dann nimmt $f(z)$ in $K_\varepsilon(b)\ \forall\ \varepsilon>0$ bis auf eine Ausnahme alle Werte $w\in\mathbb{C}\setminus\{w_0\}$ beliebig oft an.

# I, 6 Residuensatz

Durch die Darstellung als Laurentreihe lassen sich die bisher bekannten Integralformeln auf Funktionen mit isolierten Singularitäten erweitern

Bisher Cauchy's Integralsatz

$f(z)$ holomorph auf einfach zusammenhängendem Gebiet $U$ und $\gamma(t) \in U$ $\forall\, t \in [a,b]$



$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 0$$

nun offensichtlich da $f(z)$ als absolut konvergente Potenzreihe darstellbar

$$\oint f(z)\, dz = \oint \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\oint_\gamma a_n (z-b)^n}_{=0 \text{ durch Stammfunktion}} = 0$$

mit $b \in U$ beliebig so dass $\gamma(t) \in K_R(b) \subset U$

Wenn allerdings eine Singularität bei $b$ vorliegt ist das Gebiet $U$ auf dem $f$ holomorph nicht einfach zusammenhängend und der Satz gilt nicht.

Wir können $f$ nicht mehr als Potenzreihe um $b$ entwickeln, allerdings können wir stattdessen eine Entwicklung als Laurentreihe angeben

Sei $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n$ eine für $r < |z-b| < R$ absolut konvergente Laurentreihe dann gilt für $r < \rho < R$

$$\oint_{\partial K_\rho(b)} f(z)\,dz = \oint_{\partial K_\rho(b)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n \,dz$$

Da die Reihe absolut konvergiert darf gliedweise integriert werden

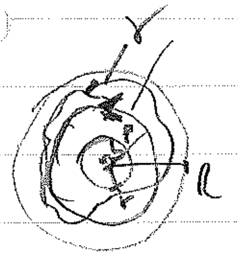
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \oint_{\partial K_\rho(b)} (z-b)^n \,dz$$

was entsprechend obiger Berechnung nur für $n=-1$ einen Beitrag liefert

$$= a_{-1} \oint_{\partial K_\rho(b)} \frac{1}{z-b}\,dz$$

$$= 2\pi i\, a_{-1} = 2\pi i \operatorname{Res}_b(f)$$

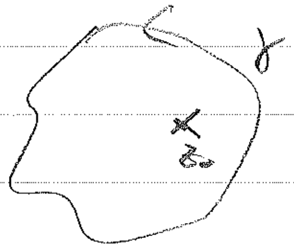
wobei $\operatorname{Res}_b(f)$ das Residuum von f im Punkt b bezeichnet




Da die oben definierte Funktion auf dem Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : r < |z-b| < R\}$ holomorph ist können wir darüber hinaus die Integrationskontur beliebig verformen

D.h. die obige Formel hängt eigentlich nicht davon ab dass es wir einen Kreis durchlaufen sondern lediglich, dass die Integrationskontur die Singularität in b einmal umläuft

Damit wir also allgemeine Aussagen treffen können, müssen wir wissen welche Singularitäten eine beliebige Kurve umschließt und wie oft diese umlaufen werden




**Def:** Umlaufzahl / Windungszahl

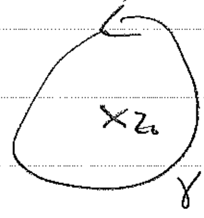
Sei $\gamma$ eine geschlossene Kurve und $z_0$ nicht enthalten in $\{\gamma(t) : t \in [a,b]\}$

Dann ist $V_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z-z_0}$

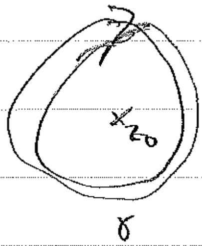
die Umlaufzahl von $\gamma$ um $z_0$

$V_\gamma(z_0) \in \mathbb{Z}$ $\quad (\ldots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots)$

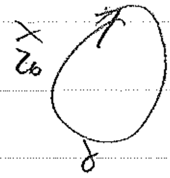
gibt an wie oft und in welchem Umlaufsinn der Punkt $z_0$ umschlossen wird




$V_\gamma(z_0) = +1$




$V_\gamma(z_0) = -2$




$V_\gamma(z_0) = 0$

<u>Residuensatz</u>: Sei $U$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f: U \setminus \{b_1, \dots, b_k\} \to \mathbb{C}$ holomorph bis auf isolierte Singularitäten in $\{b_1, \dots, b_k\}$ dann gilt

$$\boxed{\oint_\gamma dz\, f(z) = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \nu_\gamma(b_j)\, \mathrm{res}_{b_j}(f)}$$

für jede stückweise stetig differenzierbare Schleife $\gamma(t) \in U$

Hierbei bezeichnet $\mathrm{res}_{b_j}(f)$ das Residuum von $f$ in $b_j$

<u>Def:</u> Sei $f(z)$ in einer Umgebung von $b \in \mathbb{C}$ als absolut konvergente Laurentreihe darstellbar

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-b)^n$$

dann ist $\boxed{\mathrm{res}_b(f) = a_{-1}}$

oder äquivalent

$$\mathrm{res}_b(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K_\varepsilon(b)} f(z)\, dz$$

für $\varepsilon$ klein genug, dass die Laurentreihe konvergiert

Bevor wir den Satz beweisen betrachten wir folgende Spezialfälle

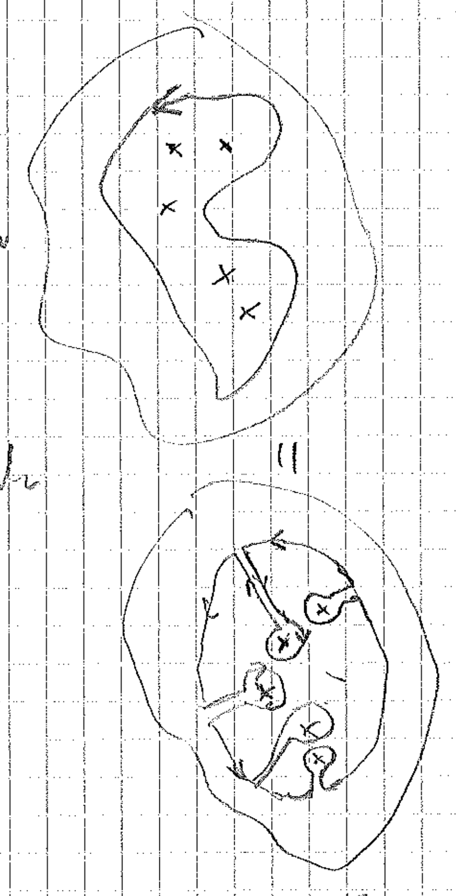
1) Wenn $f(z)$ holomorph ist $k=0$
d.h. die Funktion besitzt keine Singularitäten
und damit ist

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$$

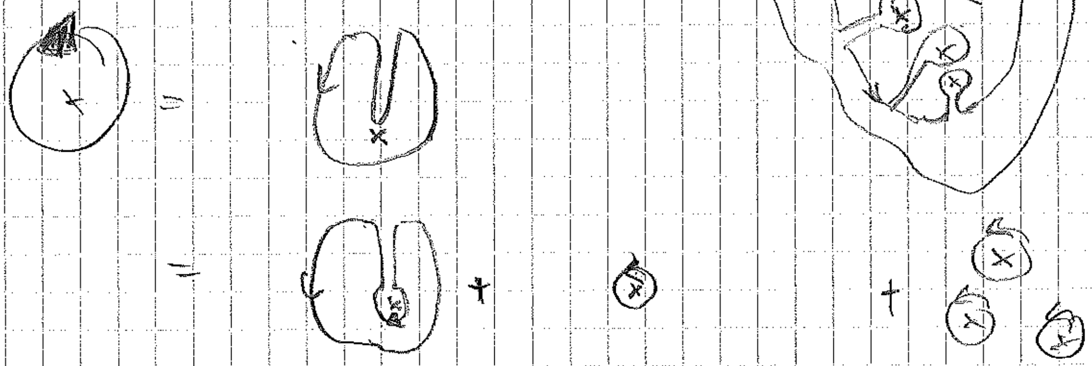
$\Rightarrow$ Cauchyscher Integralsatz

ii) Wenn $f(z) = z^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und
$\gamma = \partial K_R(0)$ erhalten wir lediglich für
$n=-1$ ein Residuum, entsprechend
unserer obigen Berechnung

Beweis: Durch Cauchyschen Integralsatz können wir außerhalb der Pole die Integrationskontur beliebig verformen.



Das heißt wir um die Pole herumschneiden. Betrachten wir zunächst eine Singularität, dann ist



Da $f$ bis auf isolierte Singularitäten holomorph ist verschwinden die Beiträge der keine Singularität enthalten (Cauchy Satz)

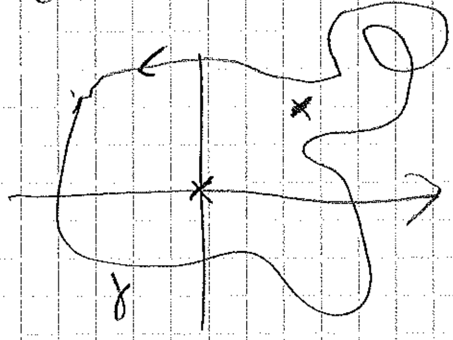
$$\Rightarrow \oint_\gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{K} V_\gamma(b_j) \oint_{\partial K_\varepsilon(b_j)} f(z)\,dz$$

für beliebig kleines $\varepsilon > 0$

Wenn $\varepsilon$ klein genug ist kann $f(b)$ in der Nähe von jedem $b_j$ als Laurentreihe dargestellt werden

$$\sum_{j=1}^{K} V_\gamma(b_j) \oint_{\partial K_\varepsilon(b_j)} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{K} V_\gamma(b_j) \oint_{\partial K_\varepsilon(b_j)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^{(j)} (z-b_j)^n = 2\pi i \sum_{j=1}^{K} a_{-1}^{(j)} V_\gamma(b_j)$$

Der Residuensatz erlaubt eine einfache Berechnung vieler Integrale, er ist als Erweiterung von Cauchys Integralsatz zu verstehen, der uns nun auch erlaubt Funktionen mit isolierten Singularitäten zu betrachten




**Bsp:** $f(z) = \dfrac{1}{z(z-(1+i))}$

hat einfache Pole bei

$z=0$ und $z=1+i$

Beide Pole werden durch die Kurve $\gamma$ einmal eingeschlossen

$$\nu_\gamma(0) = 1 \qquad \nu_\gamma(1+i) = 1$$

Damit wir den Residuensatz anwenden können müssen wir noch die Residuen in $z=0$ und $z=1+i$ bestimmen

Eine Möglichkeit besteht darin die Funktion in eine Laurentreihe zu entwickeln

$\underline{z_0=0}$: $$f(z) = \frac{1}{z(z-(1+i))} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{-(1+i)}\;\frac{1}{1+\frac{z}{(1+i)}}$$

Darstellung der geometrischen Reihe, konvergiert für $|z| < |1+i|$ d.h. genau dort wo die nächste Singularität auftritt

$$= -\frac{1}{z}\,\frac{1}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+i)^n}z^n$$

$$\Rightarrow \operatorname{res}_0(f) = \frac{-1}{1+i}$$

$\underline{z_0 = (1+i)}$

$$f(z) = \frac{1}{z(z-(1+i))} = \frac{1}{z-(1+i)} \frac{1}{z}$$

$$= \frac{1}{z-(1+i)} \frac{1}{(1+i)+z-(1+i)}$$

$$= \frac{1}{z-(1+i)} \frac{1}{1+i} \frac{1}{1+\frac{z-(1+i)}{1+i}}$$

Dementsprechend gilt analog

$$= \frac{1}{z-(1+i)} \frac{1}{1+i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+i)^n} (z-(1+i))^n$$

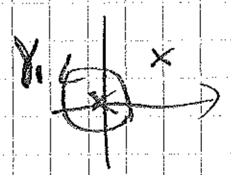
was konvergiert für $|z-(1+i)| < |1+i|$
also genau dem Abstand zur nächsten Singularität

$$\mathrm{res}_{1+i}(f) = \frac{1}{1+i}$$

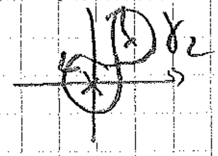
Damit ist das Integral gegeben durch

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left[V_\gamma(0)\,\mathrm{res}_0(f) + V_\gamma(1+i)\,\mathrm{res}_{1+i}(f)\right]$$
$$= 2\pi i\left[1 \times \frac{1}{1+i} + 1 \times \frac{-1}{1+i}\right] = 0$$

Natürlich ist das Ergebnis für andere Wege verschieden, z.B.



$$\oint_{\gamma_1} f(z)\,dz = \frac{2\pi i}{1+i}$$



$$\oint_{\gamma_2} f(z)\,dz = \frac{4\pi i}{1+i}$$